

Министерство образования Российской Федерации

Тульский государственный университет

Кафедра физики

ФИЗПРАКТИКУМ. МЕХАНИКА

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

Методические указания
для студентов очного обучения для специальности - физика

Под редакцией
Семина В.А.

Тула 2004

Содержание

1.	Исследование косого удара о наклонную плоскость	3
2.	Изучение вращательного движения	7
3.	Определение моментов инерции методом колебаний	10
4.	Определение радиуса кривизны вогнутой поверхности	13
5.	Определение ускорение свободного падения с помощью обратного маятника	16
6.	Изучение колебаний пружинного маятника	19
7.	Гирискосп	22
8.	Симпатические маятники	26
9.	Изучение плоского движения твердого тела на примере маятника Максвелла	30
10.	Измерение момента инерции твердого тела методом крутильных колебаний	33
11.	Определение скорости полета «пули» баллистическим методом с помощью унифилярного подвеса	36
12.	Определение ускорения свободного падения с помощью машины Атвуда	40
13.	Определение коэффициентов трения качения и трения скольжения с помощью наклонного маятника	42
14.	Определение модуля Юнга методом изгиба	45
15.	Градуировка шкалы генератора.	47
16.	Построение графиков	51
17.	Математическая обработка результатов эксперимента по методу наименьших квадратов	52
18.	Правила для математической обработки результатов эксперимента	54
19.	Примеры расчетов	56

1. Исследование косого удара о наклонную плоскость

Цель работы

Рассмотреть кинематику движения шара после удара о плоскость; определить коэффициент восстановления скорости шара.

Теоретическое введение

В данной работе рассматривается кинематика движения тела под углом к горизонту в результате соударения с наклонной плоскостью.

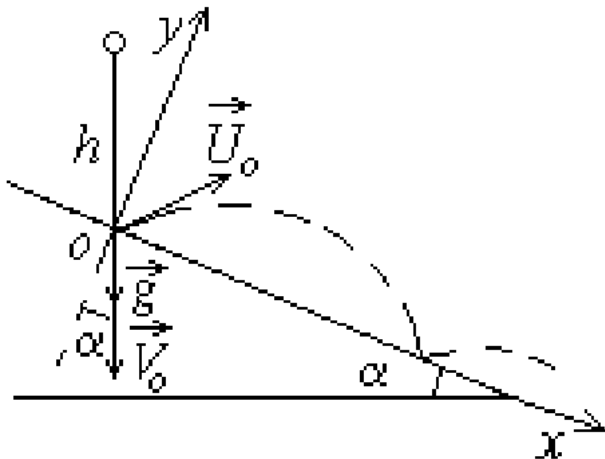


Рис.1

Стальной шарик, падая с некоторой высоты, перед ударом о наклонную плоскость имеет скорость \vec{V}_o , а отскочив от нее, – \vec{U}_o (см. рис.2). Выберем систему координат, как показано на рис.1, поместив начало координат O в точку первого соударения шарика с наклонной плоскостью. Проекции скоростей \vec{V}_o и \vec{U}_o на ось X равны, то есть $V_{ox} = U_{ox}$, так как удар можно считать мгновенным, и действие проекций на ось X силы тяжести и силы трения за короткое время не окажет существенного влияния на импульс шарика вдоль оси X (закон сохранения проекции

импульса). Рассеяние механической энергии при ударе характеризуется коэффициентом восстановления скорости k_c .

Коэффициентом восстановления скорости тела при ударе о массивную неподвижную поверхность называется отношение $k_C = |U_n/V_n|$, где U_n и V_n -- проекции скоростей тела соответственно после и до удара на нормаль к поверхности. Для данной работы согласно рис.2

$$k_C = \frac{U_{oy}}{V_{oy}} \quad (1)$$

где U_{oy} и V_{oy} -- проекции на ось y скоростей шарика соответственно после и до первого удара о наклонную плоскость.

Отскочив от наклонной плоскости в точке O со скоростью \vec{U}_o , шарик будет двигаться в воздухе с постоянным ускорением $\vec{a} = \vec{g}$ (сопротивлением воздуха пренебрегаем) и второй раз ударится о наклонную плоскость. Положение шарика при втором соударении относительно точки O определим из закона движения в проекции на ось x

$$x = x_o + U_{ox}t + a_x t^2 / 2$$

При выбранном начале координат и положительном направлении X , как показано на рис.2, $x_o=0$, $U_{ox}=V_{ox}=V_o \sin \alpha$, $a_x=g \sin \alpha$, поэтому расстояние x между первым и вторым соударением

$$x = V_o t \sin \alpha + g \sin \alpha t^2 / 2 \quad (2)$$

Время t между двумя соударениями найдем из закона движения в проекции на ось y

$$y = y_o + U_{oy} t + a_y t^2 / 2$$

Здесь $y=0$, $y_o=0$, с учетом (1) $U_{oy} = k_C |V_{oy}| = k_C V_o \cos \alpha$, $a_y = -g \cos \alpha$. Поэтому

$$0 = 0 + k_C V_o \cos \alpha t - g \cos \alpha t^2 / 2$$

откуда
$$t = 2k_C V_o / g \quad (3)$$

V_o определим из закона сохранения полной механической энергии (потери на сопротивление воздуха пренебрегаем)

$$mgh = mV_o^2 / 2 \quad (4)$$

где mgh – потенциальная энергия шарика в точке А, из которой он начинает падать без начальной скорости (в точке О потенциальную энергию шарика принимаем равной нулю); $mV_o^2 / 2$ – кинетическая энергия шарика в точке О перед ударом о наклонную плоскость.

Из равенства (4) имеем
$$V_o = \sqrt{2gh} \quad (5)$$

Подставив (3) и (5) в (2), найдем
$$x = 4k_C h \sin \alpha + 4k_C^2 h \sin \alpha$$

Отсюда $k_C^2 + k_C - x/4h \sin \alpha = 0$. Решив это квадратное уравнение, получим

$$k_C = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{x}{h \sin \alpha}} - 1 \right) \quad (6)$$

В реальных случаях $0 < k_C < 1$.

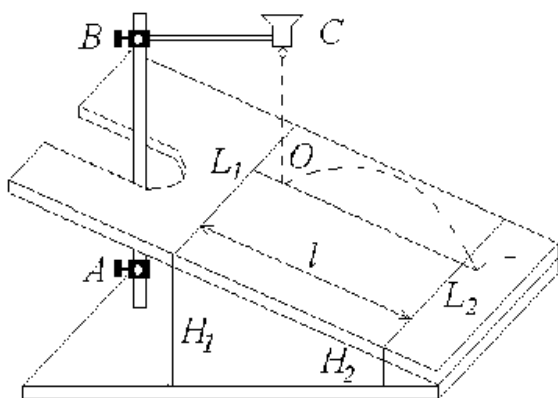


Рис. 2

Порядок выполнения работы

1. Перемещением муфты А установить произвольный наклон плоскости (примерно $10 - 15^\circ$). Измерить высоты H_1 и H_2 , длину наклонной плоскости l между линиями L_1 и L_2 (см.

рис. 2) и определить $\sin \alpha$: $\sin \alpha = \frac{H_1 - H_2}{l}$.

Примечание. Можно произвольно изменять длину наклонной плоскости l , изменяя при этом другие высоты H_1 и H_2 .

2. Перемещением муфты В установить произвольную высоту h (17 - 20 см) бункера С над наклонной плоскостью. Отцентрировать установку

бункера так, чтобы шарик после отскока ударился еще один раз о наклонную плоскость в направлении ее продольной оси.

3. Положить на наклонную плоскость узкую полоску бумаги краем вдоль черты L_1 , накрыть сверху копировальной бумагой и закрепить оба листа скобой. При проведении эксперимента скобу не трогать.

4. Поместить шарик в бункер С в слегка открытое отверстие (это позволит более точно фиксировать начальное положение шарика). Затем медленно открыть заслонку, дав шарiku провалиться. Ударившись о плоскость, шарик отскочит, и оставит след на бумаге.

5. Обозначить точку удара на бумаге точкой 1. Отогнуть от линии L_1 и полоску бумаги и копировальную бумагу таким образом, чтобы повторное падение шарика из бункера пришлось на металлическую поверхность; отскочив от нее, шарик второй раз ударится о поверхность и оставит след на бумаге. Эту точку обозначить цифрой 1'.

6. Повторить опыт при отогнутой бумаге 10 раз, обозначая следы от повторных ударов соответственно 1', 2', ..., 3'.

7. Снять листы с плоскости, определить расстояние x_i между точками 1 — 1', 1 — 2', 1 — 3', ..., 1 — 9' и занести в табл.1.

8. Вычислить среднее значение $\langle x \rangle$, определить стандартное отклонение среднего для x . Определить суммарную систематическую погрешность и относительную погрешность для x , h , H_1 , H_2 , l , $\sin \alpha$. Определить максимальную относительную погрешность. Не учитывать погрешности тех величин, относительная погрешность которых меньше максимальной в 3 раза.

9. Вычислить $\langle k_c \rangle$ по формуле (6), подставляя $x = \langle x \rangle$ и принимая радиус шарика $r \ll h$.

10. Вычислить стандартное отклонение σ_{k_c} , руководствуясь правилами расчетов для косвенных измерений. Считать, что $k_C = f(x, h, \sin \alpha)$.

$$\sigma_{k_c} = \sqrt{\left(\frac{\partial k_c}{\partial x} \sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial k_c}{\partial h} \sigma_h\right)^2 + \left(\frac{\partial k_c}{\partial \sin \alpha} \sigma_{\sin \alpha}\right)^2}$$

11. Вычислить доверительный интервал Δk_C ($\alpha = 0,8$) и относительную погрешность $E = \frac{\Delta k_c}{k_c}$,

12. Результаты измерений и расчетов записать в табл.1 и 2.

Таблица 1

x_i , мм	$\langle x \rangle$, мм	$(\langle x \rangle - x_i)$, мм	$(\langle x \rangle - x_i)^2$, мм ²
⋮			

Таблица 2.

l , мм		h , мм		H_1 , мм		H_2 , мм		$\sin \alpha$	
σ_l , мм		σ_h , мм		σ_{H1} , мм		σ_{H2} , мм		$\sigma_{\sin \alpha}$	
σ_l/l		σ_h/h		σ_{H1}/H_1		σ_{H2}/H_2		$\sigma_{\sin \alpha}/\sin \alpha$	

13. Записать результат в виде: $k_C = \bar{k}_C \pm \Delta k_C$

Контрольные вопросы

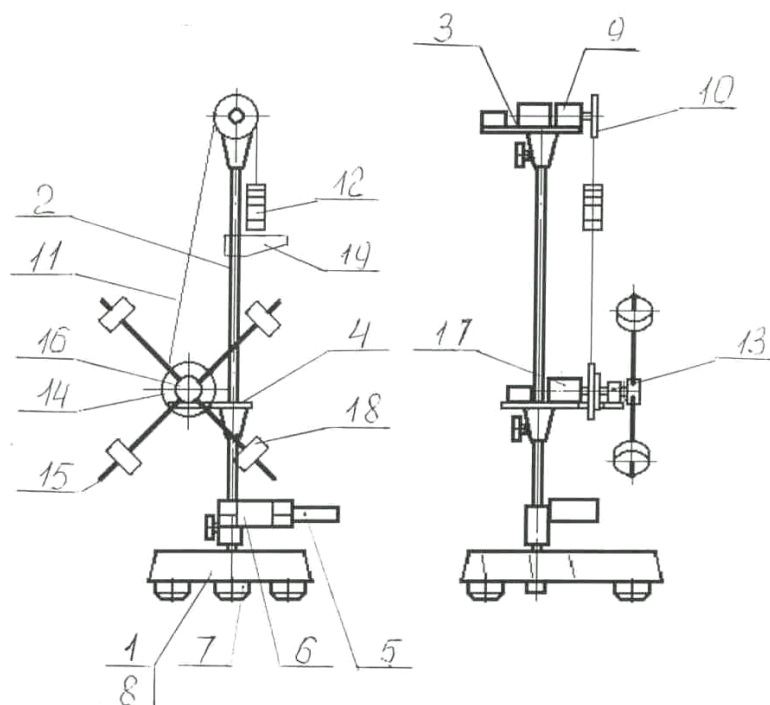
1. Что такое коэффициент восстановления скорости, какова методика его определения в данной работе?
2. Записать закон движения шарика между первым и вторым соударениями с наклонной плоскостью координатным способом. Как определить расстояние x и время t между этими соударениями?
3. Сформулировать закон сохранения полной механической энергии. Как он применяется в данной работе?
4. Найти время до того момента, когда скорость шарика после отскока станет параллельной наклонной плоскости.
5. Найти максимальное расстояние от наклонной плоскости до шарика во время полета после первого отскока.
6. Вычислить угол между скоростью шарика и наклонной плоскостью в момент второго удара.

2. Изучение вращательного движения

Цель работы

Изучить зависимость углового ускорения тела, вращающегося относительно неподвижной оси, от результирующего момента действующих на него сил.

Устройство и принцип работы установки



Установка представлена на рисунке и включает в свой состав: основание 1, вертикальную стойку 2, верхний кронштейн 3, средний кронштейн 4, кронштейн 5 для установки фотодатчика, фотодатчик 6.

Основание 1 снабжено тремя регулируемыми опорами 7 и зажимом 8 для фиксации стойки. Вертикальная стойка 2 выполнена из металлической трубы, на которую нанесена миллиметровая шкала, и имеет визир 19.

На верхнем кронштейне 3 размещается узел подшипников 9 с малоинерционным шкивом 10 изменения направления движения капроновой нити 11, на которой подвешен наборный груз 12.

На среднем кронштейне 4 размещены: узел подшипников 13, на оси которого с одной стороны закреплен двухступенчатый шкив 14, на котором имеется приспособление для закрепления капроновой нити 11, а с другой стороны находится крестовина, представляющая собой четыре металлических стержня 15, закрепленных в бобышке 16 под прямым углом друг к другу; электромагнитный тормоз 17.

На металлических стержнях 15 через каждые 10 мм нанесены риски. Грузы 18 закреплены на металлических стержнях 15 и могут свободно перемещаться и фиксироваться на каждом стержне, что дает возможность ступенчатого изменения моментов инерции крестовины.

Электромагнитный тормоз 17 предназначен для фиксации подвижной системы в начале эксперимента, выдачи электрического сигнала начала отсчета времени и торможения подвижной системы после завершения отсчета времени. Кронштейн 5 имеет зажим для крепления на вертикальной стойке 2 и элементы фиксации фотодатчика.

Теоретическое введение

При опускании груза 12 маятник вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси z . Измерив высоту h и время t , в течение которого груз из состояния покоя опустился на h , можно найти модуль постоянного ускорения из закона движения

$$y = y_0 + V_{oy}t + a_y t^2 / 2$$

При выбранной оси y , направленной вниз, $y - y_0 = h$, $V_{oy} = 0$, $a_y = a$

Поэтому
$$a = 2h/t^2 \quad (1)$$

Если нить нерастяжима, то любая точка поверхности шкива имеет тангенциальное ускорение, модуль которого равен модулю ускорения груза, т.е. $a_\tau = a$. Так как $a_\tau = \epsilon r$, то с учетом (1) имеем

$$\varepsilon = 2h/t^2 r \quad (2)$$

На груз действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ со стороны Земли и сила \vec{F} со стороны нити. Запишем второй закон Ньютона для груза, движущегося с постоянным ускорением \vec{a} , направленным вниз:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}$$

В проекции на ось y это уравнение перепишем так:

$$ma_y = mg_y + F_y$$

При выбранном положительном направлении оси y вниз, $a_y = a$, $g_y = g$, $F_y = -F$.

Поэтому

$$ma = mg - F$$

откуда $F = mg - ma$ или с учетом (1)

$$F = m\left(g - 2h/t^2\right) \quad (3)$$

Вращение маятника создается моментом силы натяжения нити $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}_1]$, проекция которого на неподвижную ось z $M_z = F_1 r$.

Направление \vec{M} определяется правилом правого винта. $F_1 = F$ при условии невесомости нити, поэтому с учетом (3)

$$M_z = m\left(g - 2h/t^2\right) r \quad (4)$$

Порядок выполнения работы

1. Подключить фотодатчик и электромагнитный тормоз среднего кронштейна установки к блоку электронному при помощи кабеля. Вилку с маркировкой "Ф" вставить в розетку фотодатчика, а вилку с маркировкой "Э" в розетку электромагнитного тормоза.

2. Установить грузы по осям крестовины на расстоянии R от оси вращения. К одному из шкивов 14 прикрепить нить 11, к другому концу нити подвесить наборный груз 12 и перекинуть нить через верхний шкив. Установить при помощи разновесов определенную массу груза.

3. Установить кронштейн с фотодатчиком в нижней части шкалы вертикальной стойки так, чтобы плоскость кронштейна, окрашенная в красный цвет, совпала с одной из рисок шкалы, а наборный груз при движении вниз проходил по центру рабочего окна фотодатчика. За нижнее положение груза берется отметка шкалы, соответствующая риске на корпусе фотодатчика и являющаяся как бы продолжением оптической оси фотодатчика, которую пересекает движущийся груз.

4. Вращая маятник, установить груз в крайнем верхнем положении таким образом, чтобы нижняя плоскость груза (визир вертикальной стойки соприкасается с нижней плоскостью груза) совпала с одной из рисок шкалы вертикальной стойки. Записать это значение.

5. Зафиксировать груз в этом положении. Для этого нажать кнопку "СЕТЬ" блока, при этом должен сработать фрикцион электромагнитного тормоза 17.

6. Нажать кнопку "ПУСК" блока. Происходит растормаживание электромагнитного тормоза, груз начинает опускаться и таймер блока начинает отсчет времени. При пересечении грузом оптической оси фотодатчика отсчет

При пересечении грузом оптической оси фотодатчика отсчет времени прекратится. Записать в таблицу 1 показание таймера, т.е. время движения груза t . Повторить пункт 6 пять раз.

7. При помощи визира по шкале вертикальной стойки определить пройденный грузом путь h , как расстояние от нижней плоскости груза в верхнем положении груза до оптической оси фотодатчика.

8. Определить среднее время $\langle t \rangle$ падения груза. Подсчитать вращающий момент M_z по формуле (4) и угловое ускорение ε по формуле (2). Все данные занести в таблицу 1.

9. Повторить 7 раз пункты 4–8, изменяя массу наборного груза 12 при том же пройденном пути h .

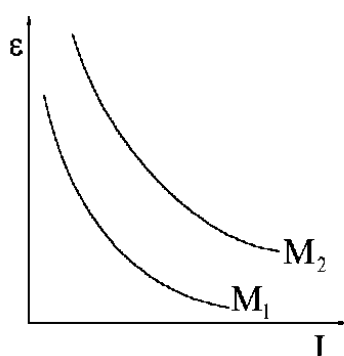
Таблица 1.

m , кг	t_i , с					$\langle t \rangle$, с	ε , с ⁻²	M_z , Н·м
.								
.								
.								

10. Построить график зависимости $M_z(\varepsilon) = J\varepsilon + M_{тр}$. Используя метод наименьших квадратов, рассчитать параметры прямой J и $M_{тр}$, а также погрешности этих параметров ΔJ и $\Delta M_{тр}$.

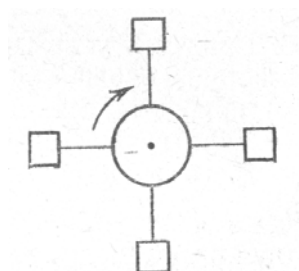
Контрольные вопросы

1. Описать маятник Обербека.
2. Записать законы и уравнения движения для груза и маятника Обербека.
3. Как практически на маятнике Обербека можно изменить момент инерции и момент сил? От чего зависит время движения груза?



4. Дать определение угловому ускорению и моменту сил. Как определить модуль и направление углового ускорения, момента силы, вращающего маятник?

5. На рисунке представлены два графика зависимости углового ускорения от момента инерции при постоянных моментах M внешних сил. Какой из этих моментов больше?



6. На валу (см. рис.) укреплены спицы с грузами. При заданном вращающем моменте, действующем на вал, вычисляют угловое ускорение вала. Как изменится угловое ускорение вала, если грузы переместить ближе к оси вращения? Момент сил, действующий на вал, сохраняется прежним.

3. Определение моментов инерции методом колебаний

Цель работы

Определить экспериментально момент инерции однородного стержня относительно двух параллельных осей, результат сопоставить с теоремой Штейнера

Теоретическое введение

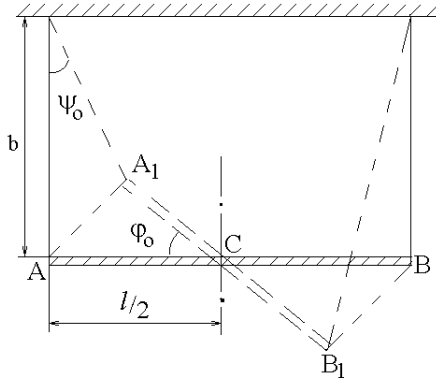


Рис. 1

В данной работе методом колебаний определяем моменты инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс, J_C , и относительно параллельной ей оси, проходящей через конец стержня, J_A . Для определения момента инерции J_C наблюдаем малые колебания стержня на бифилярном подвесе (рис.1,2). Для определения момента инерции стержня J_A наблюдаем малые колебания, подвесив его за конец.

За счет трения в точках подвеса энергия колебаний стержня уменьшается. Однако если ограничиться наблюдением нескольких колебаний (в пределах 10-20 колебаний), то работа сил трения будет невелика, ее можно не учитывать и при малых углах отклонения ($6-8^\circ$) колебания считать гармоническими:

$$\varphi = \varphi_0 \sin \frac{2\pi}{T} t \quad (1)$$

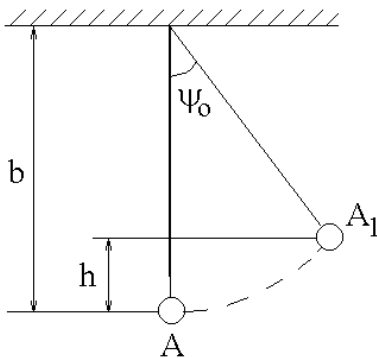


Рис. 2

где φ_0 – угловая амплитуда; T – период колебаний. Так как работой сил трения пренебрегаем, то полная механическая энергия стержня остается неизменной. При прохождении положения равновесия стержень обладает только кинетической энергией: $K = J\omega^2/2$, где ω – максимальная угловая скорость.

При отклонении стержня от положения равновесия на максимальный угол его полная механическая энергия (потенциальная) $U = mgh$, где h – максимальная высота поднятия центра масс стержня.

Запишем закон сохранения энергии

$$J\omega^2/2 = mgh \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) позволяют найти момент инерции J , если измерен на опыте период колебаний T .

1. Определение J_C – момента инерции стержня относительно оси симметрии.

Стержень на бифилярном подвесе совершает крутильные колебания (рис.1). Определяя его максимальную угловую скорость ω , продифференцируем (1) по времени:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T} \varphi_0 \cos \frac{2\pi}{T} t; \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \varphi_0 \quad (3)$$

Максимальная высота подъема центра масс стержня определяется углом Ψ_o (см.рис.2):

$$h = b(1 - \cos \Psi_o) = 2b \sin^2 \frac{\Psi_o}{2} \approx 2b \left(\frac{\Psi_o}{2} \right)^2,$$

где b – длина нити подвеса; Ψ_o – максимальный угол отклонения нити, однозначно связанный с максимальным углом отклонения стержня от положения равновесия φ_o . При малых значениях φ_o и Ψ_o конец стержня проходит путь AA_1 , который приближенно можно считать равным длине дуги AA_1 :

$$AA_1 \approx \frac{l}{2} \varphi_o \approx b \Psi_o, \quad \Psi_o = \frac{l}{2b} \varphi_o.$$

Теперь выразим h через угол φ_o :

$$h = 2b \left(\frac{\Psi_o}{2} \right)^2 = 2b \frac{1}{4} \left(\frac{l}{2b} \varphi_o \right)^2 = \frac{l^2 \varphi_o^2}{8b}. \quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в (2), получаем

$$J_C = \frac{mgl^2}{16\pi^2 b} T_C^2 \quad (5)$$

2. Определение J_A – момента инерции стержня относительно оси, перпендикулярной ему и проходящей через конец

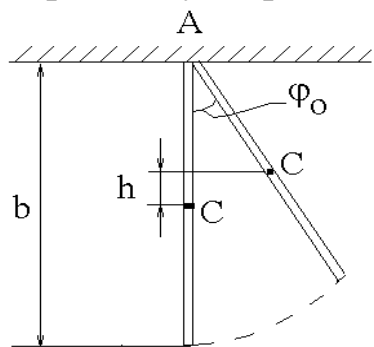


Рис.3

В формулу (2) подставляем соответствующие значения максимальной скорости при прохождении положения равновесия ω из (3) и максимальной высоты поднятия центра масс h (рис.3). Из рис.3 получаем связь между h и углом φ_o :

$$h = \frac{l}{2} (1 - \cos \varphi_o) = \frac{l}{2} 2 \sin^2 \frac{\varphi_o}{2} \approx l \left(\frac{\varphi_o}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \varphi_o^2 \quad (6)$$

Из равенства (20) с учетом (3) и (6) получаем

$$J_A = \frac{mgl}{8\pi^2} T_A^2. \quad (7)$$

Таким образом, измеряя на опыте периоды колебаний стержня T_C и T_A , длину нити подвеса, длину стержня, можно вычислить моменты инерции J_C и J_A стержня относительно параллельных осей, а результат сопоставить с теоремой Штейнера.

Порядок выполнения работы

1. Подвесить стержень на нитях строго горизонтально, расположив его между направляющими.
2. Взяться за правую направляющую, подвести к стержню и повернуть его на угол 4^0 . Затем резко развернуть направляющую планку от стержня, предоставив ему возможность совершать крутильные колебания относительно оси CC' (см.рис.1).
3. Измерить секундомером время t_C полных n_1 колебаний ($n_1=10$, отсчет времени начинать при прохождении маятником любого крайнего положения). Опыт повторить 9 раз и определить среднее время 10 колебаний $\langle t_C \rangle$.

4. Измерить l – расстояние между точками подвеса стержня А и В; b – длину нитей подвеса. Масса стержня указана на нем (в граммах). Найти σ_l и σ_b .

5. Подвесить стержень за конец А и привести в колебание в вертикальной плоскости. Угол отклонения не должен превышать 4° .

6. Определить время 10 колебаний стержня t_{Ai} . Опыт проделать 9 раз и определить $\langle t_A \rangle$.

7. Рассчитать средние периоды колебаний $\langle T_C \rangle = \frac{\langle t_C \rangle}{n_1}$ и $\langle T_A \rangle = \frac{\langle t_A \rangle}{n_1}$, а также

стандартные отклонения среднего S_C и S_A и суммарную систематическую погрешность σ_C и σ_A для периодов T_C и T_A .

8. По формулам (5) и (7) вычислить моменты инерции стержня относительно перпендикулярных ему, но параллельных друг другу осей, проходящих через центр масс (J_C) и конец стержня (J_A), подставляя в них средние значения $\langle T_C \rangle$ и $\langle T_A \rangle$.

9. Вычислить величины $J_A - J_C$ и $ml^2/4$. Сравнить их значения, используя найденные погрешности измерений.

10. Данные измерений и вычислений занести в табл. 1-4.

Таблица 1. (Аналогично Таблица 2 для t_A)

n_i	t_{ci}, c	$\langle t_C \rangle, c$	$\Delta t_{ci}, c$	$(\Delta t_{ci})^2, c^2$
	\vdots			
$\langle T_C \rangle =$		$S_C =$		$\sigma_C =$

Таблица 3.

$m, кг$	$\sigma_m, кг$	$l, м$	$\sigma_l, м$	$b, м$	$\sigma_b, м$

Таблица 4.

$J_C, кг \cdot м^2$	$\sigma_{J_C}, кг \cdot м^2$	$J_A, кг \cdot м^2$	$\sigma_{J_A}, кг \cdot м^2$	$J_A - J_C, кг \cdot м^2$	$ml^2/4, кг \cdot м^2$

Контрольные вопросы

1. Каков физический смысл момента инерции материальной точки, твердого тела?
2. Как вычислить момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс?
3. Сформулировать теорему Штейнера.
4. Получить связь между максимальной угловой скоростью стержня и амплитудой его колебаний.
5. Получить формулу для расчета момента инерции шара, кольца, стержня относительно оси, проходящей через центр масс.

4. Определение радиуса кривизны вогнутой поверхности

Цель работы

Изучить законы движения катающегося по сферической вогнутой поверхности шарика, рассмотреть условия его гармонических колебаний и определить радиус кривизны поверхности

Теоретическое описание

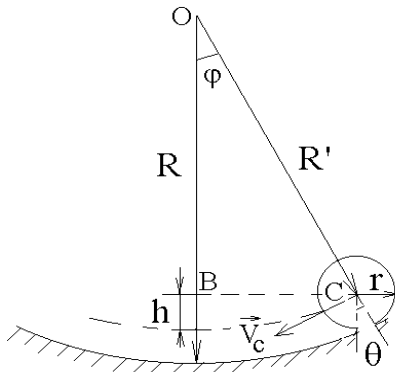


Рис.1

Радиус кривизны R гладкой сферической поверхности можно определить, измерив период колебания T шарика, катающегося по этой поверхности.

Если пренебречь потерями энергии, затрачиваемой на преодоление диссипативной силы трения, то для катающегося без проскальзывания шарика должен выполняться закон сохранения механической энергии. Центр масс C шарика движется поступательно, но, кроме того, шарик вращается относительно оси z , проходящей через точку C перпендикулярно плоскости (рис.1). Поэтому полная механическая энергия шарика

$$E = \frac{mV_C^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2} + mgh = \text{const} \quad (1)$$

Здесь m – масса шарика; $J_C = 2/5mr^2$ – его момент инерции относительно оси z ; r – радиус шарика.

Модуль угловой скорости ω шарика вокруг оси z связан с модулем скорости V_C поступательного движения центра масс соотношением

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{V_C}{r} \quad (2)$$

Подставляя (2) и выражение для J_C в (1), получаем

$$E = \frac{7}{10}mr^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgh = \text{const} \quad (3)$$

Но при качении шарика по сферической поверхности его центр масс отклоняется относительно центра O поверхности на угол φ . Из рис.1 видно, что угол φ связан с углом поворота θ шарика относительно оси z соотношением

$$\theta = \frac{R'}{r}\varphi \quad (4)$$

где $R' = R - r$. Кроме того, из прямоугольного треугольника OBC следует, что

$$h = R' - R'\cos\varphi. \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в формулу (3), выражаем полную механическую энергию шарика через угол φ :

$$E = \frac{7}{10}m(R')^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + mgR'(1 - \cos\varphi) = \text{const} \quad (6)$$

В верхней точке траектории скорость шарика равна нулю и вся механическая энергия шарика переходит в потенциальную. При прохождении шариком положения равновесия ($h=0$) скорость и кинетическая энергия шарика максимальны.

Рассмотрим кинематику движения шарика. Скорость \vec{V}_C его центра масс С всегда направлена по касательной к траектории (рис.2). Полное ускорение \vec{a} центра масс равно сумме тангенциального \vec{a}_τ и нормально-го \vec{a}_n ускорений. Ускорение \vec{a}_τ направлено также по касательной к траектории. Его модуль связан с модулем углового ускорения вращения шарика вокруг оси z формулой

$$a_\tau = r \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (7)$$

Ускорение \vec{a}_n направлено к центру кривизны. Его

модуль
$$a_n = \frac{V_C^2}{R'} \quad (8)$$

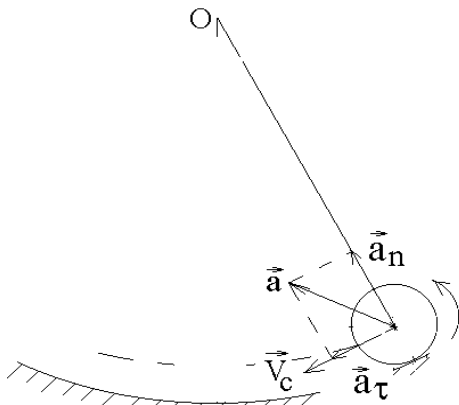


Рис. 2

Эти модули изменяются при колебательных движениях шарика периодически. В верхней точке траектории при наибольшем отклонении шарика от положения равновесия V_C шарика и a_n равны нулю, а a_τ достигает максимума. При прохождении положения равновесия, наоборот, $a_\tau = 0$, а V_C и a_n максимальны.

Найдем период колебаний шарика. Для этого необходимо получить динамическое уравнение колебаний (т.е. уравнение динамики для поступательного или вращательного движения колеблющегося шарика). Для любых незатухающих гармонических колебаний это уравнение имеет общий вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 x = 0 \quad (9)$$

Физическое тело будет совершать гармонические колебания в том случае, если на него действует сила или момент силы, пропорциональные смещению от положения равновесия и стремящиеся вернуть тело в положение равновесия.

Воспользуемся законом сохранения механической энергии (6). Возьмем производную по времени от обеих частей этого уравнения, сократим полученное выражение на $mR'(d\varphi/dt)$ и приведем его к виду, аналогичному (9):

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{5}{7} \frac{g}{R'} \sin \varphi = 0 \quad (10)$$

Отсюда видно, что шарик будет совершать гармонические колебания относительно положения равновесия в том случае, когда $\sin \varphi \approx \varphi$. Т.е. условием гармонических колебаний в данной работе будут малые углы отклонения шарика от положения равновесия.

В этом случае угол φ изменяется по гармоническому закону $\varphi = \varphi_o \sin(\omega_o t + \alpha)$, где

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{5g}{7R'}} \quad (11)$$

Используя выражения (4), (7) и (8), можно вычислить значения скорости и ускорения шарика в любой момент времени. Чтобы найти зависимость радиуса кривизны

Р сферической поверхности от периода T , которую находим из формулы (11), подставим в нее $R' = R - r$:

$$R = \frac{5}{7} g \frac{T^2}{4\pi^2} + r \quad (12)$$

При вычислении мы не учитывали, что механическая энергия шарика уменьшается за счет работы диссипативной силы трения и потому в действительности колебания шарика будут затухающими. Затуханием колебаний в работе пренебрегаем.

Порядок выполнения работы

1. С помощью микрометра 5 раз в разных местах измерить диаметр шарика d и вычислить радиус $r=d/2$.
2. Вывести шарик из положения равновесия так, чтобы угол отклонения φ (см. рис.1) был мал. Определить время t пяти ($n=5$) полных колебаний шарика. Опыт провести 9 раз. Определить период колебаний $T_i=t_i/n$. Занести данные в табл.1.
3. Вычислить средние значения радиуса шарика $\langle r \rangle$ и периода колебаний $\langle T \rangle$.
4. Определить случайные и систематические погрешности измеряемых величин
5. Подставляя $\langle r \rangle$ и $\langle T \rangle$ в формулу (12), найти радиус кривизны поверхности R .
6. Рассчитать погрешность радиуса кривизны поверхности R , как косвенной величины $R = f(T, r)$ (см. формулу (12)).

Данные измерений и вычислений занести в табл. 1-3.

Таблица 1

d , м					$\langle d \rangle$, м	$\langle r \rangle$, м

$$\sigma_d = \dots, \quad S_{\bar{d}} = \dots, \quad \sigma_r = \sigma_d/2 = \dots, \quad S_{\bar{r}} = S_{\bar{d}}/2.$$

Таблица 2. $n = \dots$

t_i , с	t_i , с	Δt_i , с	$(\Delta t_i)^2$, с ²

$$\sigma_t = \dots, \quad S_{\bar{t}} = \dots, \quad \sigma_T = \sigma_t/n = \dots, \quad S_{\bar{T}} = S_{\bar{t}}/n.$$

Таблица 3

R , м	σ_R , м	$S_{\bar{R}}$, м	ΔR , м	E , %

Контрольные вопросы

1. Из каких составляющих складывается полная энергия шарика?
2. Когда сохраняется полная механическая энергия?
3. Как направлены скорость и ускорение центра масс шарика?
4. Укажите положение шарика, в которых его центр будет иметь: а) максимальное угловое ускорение; б) максимальную линейную скорость; в) тангенциальное ускорение, равное нулю; г) нормальное ускорение, равное нулю; Объясните ваш выбор.
5. Какой вид имеет динамическое уравнение колебаний шарика?
6. Сформулируйте условия, при которых возникают гармонические колебания.
7. Почему угол отклонения шарика (от положения равновесия) должен быть мал?

5. Определение ускорение свободного падения с помощью оборотного маятника

Теоретическое введение

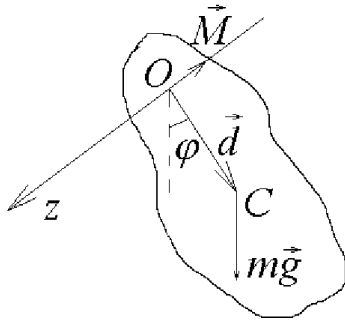


Рис. 1

Математическим маятником называется материальная точка, подвешенная на невесомой и нерастяжимой нити. Физическим маятником называется любое твердое тело, способное совершать колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку O, лежащую выше его центра масс C.

Отклоним маятник из положения равновесия на некоторый угол φ (рис.1) и отпустим. Возникает вращающий момент силы тяжести $\vec{M} = [\vec{d}, m\vec{g}]$, проекция которого на

ось z $M_z = -mgd\sin\varphi$, где m – масса тела; d – расстояние от оси вращения z до центра масс C. Знак минус выражает тот факт, что момент M_z стремится уменьшить угол φ . При малых колебаниях угол φ мал и можно положить $\sin\varphi \approx \varphi$, поэтому $M_z = -mgd\varphi$. Применяя уравнение динамики вращательного движения $M_z = Jd^2\varphi/dt^2$, получим дифференциальное уравнение гармонических колебаний физического маятника: $Jd^2\varphi/dt^2 = -mgd\varphi$ или $d^2\varphi/dt^2 + (mgd/J)\varphi = 0$. Сравнивая это уравнение с уравнением колебаний материальной точки $d^2x/dt^2 + \omega_0^2 x = 0$ можно найти собственную частоту колебаний физического маятника $\omega_0 = \sqrt{mgd/J}$ или выразить период

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}}, \quad (1)$$

где $l_{\text{пр}} = J/md$ – приведенная длина физического маятника (**длина нити математического маятника с таким же периодом, что и у физического**).

Точное измерение периода колебаний любого физического маятника позволяет в принципе определить ускорение свободного падения g в любой точке земного шара. Эти методы определения g основаны на зависимости периода колебаний T от g по формуле (1).

Если использование произвольных физических маятников удобно для определения вариаций g , т.е. нахождения отношений значений g в различных точках поля тяготения, то при определении самого значения g возникает трудность точного определения момента инерции маятника.

Это затруднение исключено в методе оборотного маятника, в котором из расчетных формул исключается величина момента инерции маятника J_0 .

Методы измерений

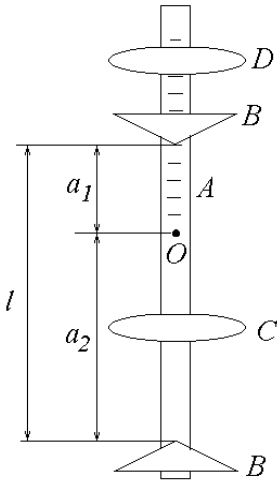


Рис. 2

Этот метод основан на известном свойстве двух точек физического маятника, точки подвеса и точки качания, при последовательном подвешивании маятника в которых его период остается неизменным. Расстояние между этими точками определяется приведенной длиной физического маятника $l_{\text{пр}}$.

Таким образом, если у физического маятника найдены две сопряженные точки, когда периоды колебаний на них T_1 и T_2 точно совпадают, то для определения g необходимо точно измерить $T_0 = T_1 = T_2$ и $l_{\text{пр}}$, равное расстоянию между этими точками

$$g = \frac{4\pi^2 l_{\text{пр}}}{T_0^2} \quad (2)$$

Однако экспериментально найти эти точки с необходимой точностью достаточно сложно, и практически всегда $T_1 \neq T_2$.

В этом случае (используя теорему Штейнера)

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_o + md_1^2}{mgd_1}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_o + md_2^2}{mgd_2}}, \quad (3)$$

Из (3) легко получить

$$T_1^2 g d_1 - T_2^2 g d_2 = 4\pi^2 (d_1^2 - d_2^2),$$

откуда

$$g = 4\pi^2 \frac{d_1^2 - d_2^2}{d_1 T_1^2 - d_2 T_2^2} \approx \frac{4\pi^2 L}{T_0^2}, \quad (4)$$

где $L = d_1 + d_2$, а $T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2} \approx T_1 \approx T_2$.

В данной работе используется обратный маятник, изображенный на рис. 2. На металлическом стержне А опорные призмы В жестко закреплены и не перемещаются. Расстояние между ними фиксировано. Также фиксировано и положение чечевицы С. Вторая чечевица D находится на конце стержня (не между призмами) и может перемещаться по стержню, причем ее положение определяется по шкале. Центр масс маятника обозначен точкой О.

Порядок выполнения работы

Пользуясь секундомером, определяют периоды колебаний маятника для различных (не менее 10) положений чечевицы D. Измеряют время 20 колебаний (для уменьшения субъективной ошибки), а затем результат делят на 20, получая значение периода. Переворачивая маятник и подвешивая его на противоположную призму, поочередно находят периоды T_1 и T_2 для каждого положения чечевицы D. По полученным результатам строят график зависимости периода колебаний от положения чечевицы D, откладывая по оси абсцисс деления шкалы, указывающие положение чечевицы D, по оси ординат – величину периода колебаний. На график наносят две кривые для разных точек подвеса. По точке пересечения двух кривых определяют положение чечевицы D, при которой $T_1 \approx T_2$. Для этого положения чечевицы

D дополнительно определяют периоды T_1 и T_2 с максимальной точностью (измеряют время 50 колебаний и делят на 50). В суммарной систематической погрешности для периода T_0 учесть различие между T_1 и T_2 $\left(\sigma = \frac{T_2 - T_1}{2}\right)$

По нанесенным делениям на стержне находят расстояние L между опорными призмами В.

По полученным данным определяют величину g и сравнивают полученный результат с табличными данными. При выполнении работы следует помнить, что приведенная теория верна лишь в приближении малых амплитуд колебания маятника, поэтому угол отклонения маятника при всех измерениях не должен превышать $\approx 5^\circ$. Рассчитать погрешность косвенной величины g из формулы (4).

Контрольные вопросы

1. Дайте определение математического и физического маятника.
2. Выведите формулу периода колебаний физического маятника.
3. Что такое приведенная длина? Как она связана с моментом инерции физического маятника?
4. Что такое сопряженные точки?
5. Сформулируйте теорему Штейнера.
6. Шар и диск с одинаковыми радиусами и массами совершают колебания относительно горизонтальной оси, проходящей по касательной к поверхности. Равны ли частоты их колебаний?

6. Изучение колебаний пружинного маятника

Цель работы

Изучить собственные колебания пружинного маятника в воздухе, определить жесткость пружины двумя способами.

Теоретическое введение

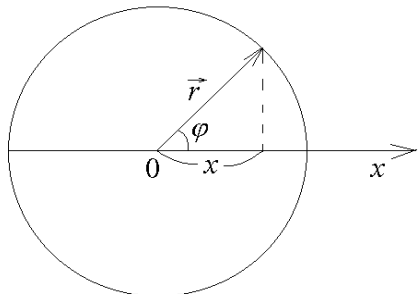


Рис. 1

Гармонические колебания.

Гармонические колебания представляют собой периодический процесс, в котором изменение величины происходит по закону косинуса (или синуса). Например, проекция радиуса-вектора \vec{r} точки, движущейся по окружности, на ось x , лежащую в плоскости движения точки (рис.1), изменяется со временем по косинусоидальному закону. Если окружность имеет радиус $A=|\vec{r}|$, а угловая скорость вращения точки $\vec{\omega}$ постоянна, то проекция

$$x = A \cos \varphi = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Период изменения x , очевидно, будет равен $T=2\pi/\omega$, где T – время одного оборота точки, через которое весь процесс в точности повторяется; ω – циклическая (круговая) частота; φ_0 – начальный угол поворота относительно оси x . Следовательно, ω отличается множителем 2π от частоты ν :

$$\omega = 2\pi\nu$$

Так как максимальное значение косинуса равно единице, то максимальное значение x равно A . Это максимальное значение называется амплитудой колебаний.

Аргумент косинуса $(\omega t + \varphi_0)$ носит название фазы колебаний, а φ_0 – начальной фазы колебаний.

Пусть теперь гармонические колебания вдоль оси x совершает материальная точка массой m . Выясним какая при этих условиях на нее должна действовать сила.

Проекция скорости точки на ось x

$$v_x = dx/dt = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

проекция ускорения

$$a_x = dv_x/dt = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x.$$

По второму закону Ньютона

$$F_x = ma_x = -m\omega^2 x = -kx,$$

где k – постоянный коэффициент.

Таким образом, для того чтобы материальная точка совершала гармонические колебания, действующая на нее сила должна быть пропорциональна x и направлена в

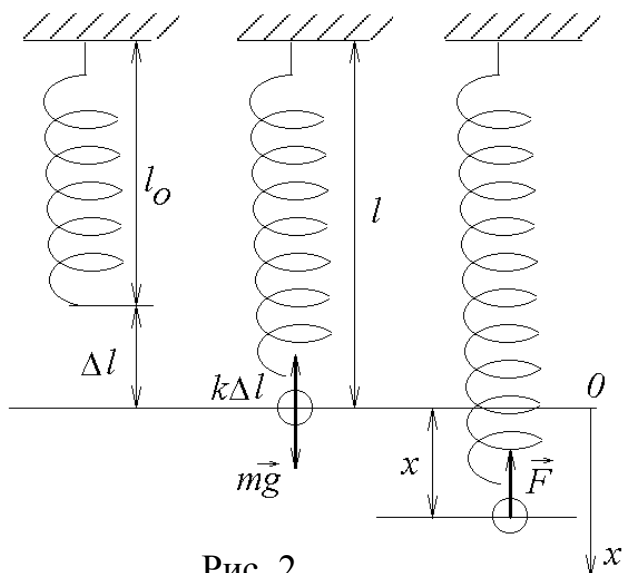


Рис. 2

сторону, противоположную смещению x . Такая сила называется упругой (или в общем случае – квазиупругой).

Рассмотрим систему, состоящую из груза массой m , подвешенного на пружине, массой которой можно пренебречь (рис.2). Пусть l_0 – длина пружины без подвешенного к ней груза, тогда под тяжестью груза пружина растянется на $\Delta l = l - l_0$. В положении равновесия модуль силы тяжести mg равен модулю упругой силы $k\Delta l$:

$$mg = k(l - l_0), \quad (1)$$

где k – коэффициент упругости пружины. Коэффициент k численно равен силе, которую нужно приложить к пружине при упругой деформации, чтобы растянуть (или сжать) пружину на единицу длины.

Если вывести груз из положения равновесия 0, то на груз будет действовать дополнительная сила упругости, проекция которой на направленную вниз ось x будет равна $F = -kx$ (закон Гука). Под действием этой силы груз, после смещения на $x = A$ и предоставленный самому себе, будет совершать гармонические колебания. Основное уравнение динамики поступательного движения (второй закон Ньютона) для груза принимает вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (2)$$

Решение этого уравнения имеет вид (рис.3)

$$x = A \cos \omega_0 t \quad (3)$$

Функция (3) – это закон движения груза на пружине, где A – амплитуда колебания, т.е. наибольшее отклонение груза от положения равновесия.

Подставляя решение (3) в (2), получаем $-m\omega_0^2 A \cos \omega_0 t = -kA \cos \omega_0 t$.

Отсюда собственная частота системы $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

Так как $T = 2\pi/\omega_0$, то

$$T = 2\pi\sqrt{m/k} \quad (4)$$

В рассмотренном примере не учитывалась сила сопротивления, поэтому колебания считались незатухающими.

Порядок выполнения работы

1. При пяти различных грузах в положении равновесия определить длину пружины l .

2. Построить график зависимости $y = mg$ от $x = l$. В этом случае получается линейная зависимость $y = A_1 x + B_1$, где $A_1 = k_1$, $B_1 = k_1 l_0$ (см. формулу 1). Методом наименьших квадратов оценить коэффициент упругости k_1 и начальную длину пружины $l_0 = B_1/k_1$. Массы всех грузов указаны на них. Данные занести в табл.1.

3. Подвесить груз к этой же пружине и вывести маятник из положения равновесия, сместив вниз на 2–3 мм, и отпустить. Секундомером измерить время t полных $n = 20$ колебаний (начинать отсчет при прохождении грузом верхнего или нижнего положения). Тогда период колебаний $T = t/n$.

4. Прodelать пункт 3 для четырех грузов различной массы. Данные занести в табл.2.

5. Построить график зависимости $y = 4\pi^2 m$ от $x = T^2$, исходя из формулы (4). В этом случае получается линейная зависимость $y = A_2 x + B_2$, где $A_2 = k_2$. Методом наименьших квадратов определить значение коэффициента упругости k_2 .

6. Сравнить k_1 и k_2 , используя рассчитанные погрешности коэффициентов упругости в двух экспериментах. Для этого ввести разность этих чисел $z = k_1 - k_2$, и рассчитать ее погрешность Δz . Если будет выполняться соотношение $z < \Delta z$, то можно считать различие в числах несущественным.

Таблица 1.

m, кг	mg, Н	l, м	k_1 , Н/м

Таблица 2.

m, кг	t, с	T, с	$4\pi^2 m$, кг	T^2 , с ²	k_2 , Н/м

Контрольные вопросы

1. Каковы необходимые условия для возбуждения гармонических колебаний в механической системе?
2. Чем определяется период, амплитуда и начальная фаза свободных механических гармонических колебаний?
3. Каков физический смысл коэффициента упругости пружины?
4. Записать динамические уравнения и законы движения груза на пружине.
5. Получить формулу периода колебаний пружинного маятника.

7. Гироскоп

Цель работы

Целью настоящей работы является изучение вращения твёрдого тела вокруг неподвижной точки.

Теоретическое введение

Гироскопом называется массивное твёрдое тело, быстро вращающееся вокруг своей оси симметрии. Частным случаем гироскопа является обычный волчок.

Как известно, общим уравнением вращательного движения твёрдого тела является уравнение моментов:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (1)$$

где \vec{L} - собственный момент импульса тела, а \vec{M} - суммарный момент внешних сил относительно центра масс.

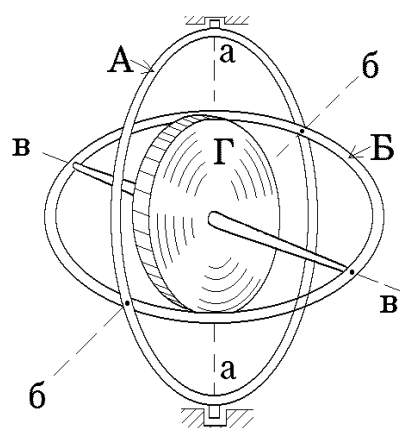


Рис.1

Рассмотрим частный случай вращательного движения, когда центр масс тела неподвижен, и оно имеет три вращательных степени свободы. Реализовать такую ситуацию можно, закрепив гироскоп в **кардановом подвесе** (рис.1). Наружное кольцо А может свободно поворачиваться вокруг вертикальной оси aa . Внутреннее кольцо Б связано с кольцом А горизонтальной осью bb . В кольце Б закреплён гироскоп Г, ось вращения которого vv перпендикулярна к оси bb , но может составлять с осью aa произвольный угол. Центр масс гироскопа совпадает с точкой пересечения всех трёх осей aa , bb и vv и

поэтому при любых поворотах остаётся неподвижным.

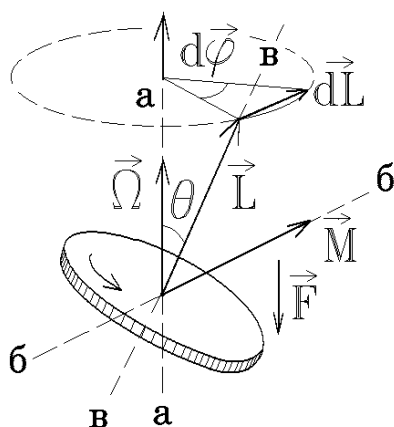


Рис. 2

Пусть к оси гироскопа, наклонённой к вертикали под углом θ , приложена вертикальная внешняя сила \vec{F} (рис.2). Она создаёт момент сил \vec{M} , направленный горизонтально по оси bb . Как следует из уравнения (1) $d\vec{L} = \vec{M}dt$, т.е. вектор $d\vec{L}$ направлен, как и вектор \vec{M} , параллельно оси bb . Поэтому за время dt вектор \vec{L} повернётся на угол $d\phi$, причём, как видно из рис.2, $|d\vec{L}| = R d\phi = L \sin \theta d\phi$ или, с учётом направлений векторов,

$$d\vec{L} = d\vec{\phi} \times \vec{L} \quad (2)$$

Так как векторы \vec{L} и \vec{M} всегда ортогональны, то вектор \vec{M} поворачивается вместе с вектором \vec{L} , т.е. их взаимное расположение не меняется с течением времени. Это означает, что ось гироскопа вращается вокруг

вертикальной оси (вдоль которой действует сила) в том же направлении, в котором вращается и сам гироскоп. Это вращение оси называется прецессией.

Подставляя (2) в (1), получаем уравнение движения гироскопа

$$\vec{\Omega} \times \vec{L} = \vec{M} \quad (3)$$

где $\vec{\Omega} = d\vec{\phi}/dt$ представляет собою угловую скорость прецессии.

Вообще говоря, вектор момента импульса гироскопа состоит из двух слагаемых: $I_o\omega$ и $I_1\Omega$, где I_1 - момент инерции гироскопа относительно его диаметра. Поэтому вектор момента импульса \vec{L} не совпадает по направлению с вектором угловой скорости гироскопа $\vec{\omega}$, а значит и с осью гироскопа, и уравнение (3) справедливо только при условии $I_o\omega \ll I_1\Omega$ или

$$\Omega \ll \omega. \quad (4)$$

При этом $\Omega = \frac{M}{I_o\omega \sin \theta}$, откуда при $\theta = \pi/2$ имеем:

$$\Omega = \frac{M}{I_o\omega} \quad (5)$$

К тому же при выводе соотношений (1) - (5) подвеска гироскопа предполагалась идеальной, т.е. силы трения - пренебрежимо малыми. Однако в реальных ситуациях силы трения значительно усложняют нарисованную выше картину прецессии.

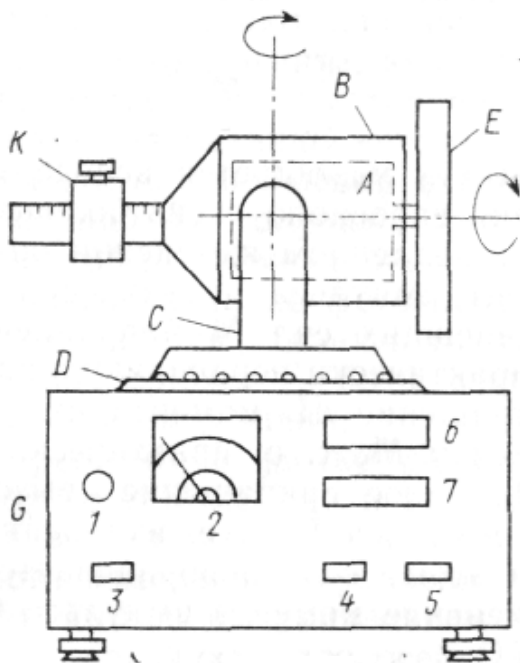


Рис.3

Описание прибора. Прибор (рис. 3) состоит из электрического моторчика *A*, укрепленного в обойме *B*. Обойма опирается на вертикальный стержень *C* и может вращаться вокруг горизонтальной оси, а вместе со стержнем – вокруг вертикальной. Собственно, гироскопом является ротор моторчика с массивным диском *E*. Момент внешних сил, приложенных к гироскопу, может изменяться при перемещении груза *K* по стержню обоймы. Прибор содержит также электронный блок *O*, в состав которого входят: система измерения скорости вращения моторчика, электронный таймер, фотоэлектрическая система измерения угла поворота гироскопа вокруг вертикальной оси.

Включение моторчика производится выведением ручки «скорость вращения» *1* из крайнего левого положения. Дальнейшее вращение этой ручки по часовой стрелке приводит к увеличению скорости вращения моторчика. Стрелочный прибор *2* на панели блока показывает скорость вращения моторчика.

Включение электронного таймера и фотоэлектрической системы измерения угла ϕ поворота гироскопа вокруг горизонтальной оси производится нажатием клавиши «сеть» *3*. При нажатии на клавишу «сброс» *4* происходит обнуление табло элек-

тронного блока 6, 7. После нажатия на клавишу «сброс» происходит запуск фотоэлектрической системы измерения угла φ и электронного таймера в момент, когда световой пучок попадает на фотоэлемент системы через одну из прорезей на цилиндрической диафрагме O , поворачивающейся вместе с гироскопом вокруг вертикальной оси. После нажатия на клавишу «стоп» 5 происходит остановка измерений времени t и угла φ при очередном попадании светового пучка на фотоэлемент системы. Угловую скорость прецессии получают путем деления зафиксированного на табло 7 электронного блока значения угла φ на соответствующее время t .

Порядок выполнения

1. Груз K закрепить на стержне обоймы так, чтобы весь прибор находился в безразличном равновесии, ось гироскопа устанавливать горизонтально. Записать положение груза l_0 по шкале на стержне.
2. Включить мотор гироскопа и довести число оборотов до 2000 об/мин. Убедиться, что частота вращения установилась ($\omega = \text{const}$).
3. Удерживая ось гироскопа рукой на нулевой отметке по лимбу измерения угла, сместить груз K на 1 см, создавая момент силы тяжести M . Величина этого момента сил определяется по формуле $M = P \cdot (l - l_0)$, где $P = mg$ — заданный вес груза, l — значение нового положения, измеряемого по шкале на стержне.
4. Освободить ось гироскопа. Измерить время прецессии t и угол поворота гироскопа вокруг вертикальной оси φ за это время.
5. Повторить пункты 3 - 4, устанавливая ось гироскопа в исходное нулевое положение по лимбу и смещая груз K каждый раз на 1 см до упора. Каждый раз измерять угол поворота φ и время t . Данные занести в таблицу.
6. Повторить пункты 1 – 5 для частоты оборотов 4000 об/мин и 6000 об/мин. Занести результаты в таблицу 2 и 3, аналогичные таблице 1.
7. Построить три графика зависимости $M = A \cdot \Omega + B$ для трех значений числа оборотов. $A = I_0 \omega = L$ — момент импульса гироскопа. Методом наименьших квадратов рассчитать значение A и B для каждого графика, а также погрешность ΔA . Определить три значения момента инерции гироскопа по формуле $I_0 = A/\omega$. Рассчитать погрешности ΔI_0 в трех случаях.
8. Сравнить три значения моментов инерции гироскопа, используя теорию ошибок. Для этого найти стандартное отклонение от среднего трех значений и сравнить с $\sqrt{(\Delta I_{01})^2 + (\Delta I_{02})^2 + (\Delta I_{03})^2}$.

Таблица 1. $l_0 = \dots$ м; $\omega = \dots$ рад/с

l , м	φ , °	φ , рад	t , с	Ω , рад/с	M , Н·м

Контрольные вопросы

1. Уравнение прецессии и его особенности.
2. Гироскопический момент и его применение: Гирокомпас.
3. Нутация.

Задачи: Иродов И.Е. Задачи по общей физике, 1988 г. изд., № 1.305 - 1.311.

Литература

1. Иродов И.Е. Основные законы механики.-- 4-е изд.-- М.: Высш. шк., 1997 -240 с.
 2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Механика. -- 2-е изд. -- М.:Физмат, 1979 -- 520 с.
 3. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности.- 2-е изд. - М.:Высш.шк., 1986 -- 320 с.
 4. Зоммерфельд А. Механика -- М.: ИЛ, 1947 -- 391 с.
 5. Киттель Ч. и др., Механика -- М.:Физмат, 1971 -- 480 с.
- Иродов И.Е. Задачи по общей физике. -- 2-е изд. -- М.: Физмат, 1988 - 416 с.

8. Симпатические маятники

Цель работы

Исследование особенностей колебаний двух одинаковых маятников, соединённых слабой пружиной.

Теоретическое введение

Симпатические маятники являются простейшим примером связанных осцилляторов. Это - два одинаковых математических маятника (т.е. два шарика массы m , закреплённые на концах невесомых стержней длины l), связанные пружиной с жёсткостью k . Концы пружины прикреплены к стержням на расстояниях b от точек подвеса; в состоянии равновесия пружина не деформирована (рис.1).

При отклонениях маятников на малые углы φ_1 и φ_2 на каждый из них, помимо моментов сил тяжести, равных $-lmg \sin \varphi_{1,2} \approx -lmg \varphi_{1,2}$ будут действовать моменты силы упругости пружины, равные

$$\mp F_{\text{упр}} \cdot b = \mp k(b \operatorname{tg} \varphi_1 - b \operatorname{tg} \varphi_2)b \approx \mp kb^2(\varphi_1 - \varphi_2),$$

где знак "-" относится к первому, а знак "+" - ко второму маятнику.

Таким образом, уравнения колебаний маятников принимают вид:

$$I \frac{d^2 \varphi_{1,2}}{dt^2} = -lmg \varphi_{1,2} \mp kb^2(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (1)$$

где $I = ml^2$ -- момент инерции каждого маятника.

Для решения этих уравнений введём новые переменные:

$$u = \varphi_1 + \varphi_2 \quad \text{и} \quad v = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (2)$$

которые называются нормальными колебаниями.

Складывая и вычитая уравнения (1), получаем уравнения нормальных колебаний:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{g}{l} u = 0; \quad \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{g}{l} \left[1 + \frac{2kb^2}{mgl} \right] v = 0. \quad (3)$$

Отсюда следует, что нормальные колебания являются гармоническими с частотами

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} \left[1 + \frac{2kb^2}{mgl} \right]}, \quad (4)$$

$$\text{т.е. } u = A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1); \quad v = A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \quad (5)$$

Можно показать, что нормальные колебания симпатических маятников возникнут, если оба маятника возбудить **одинаково** в одном и том же (рис.2,а) или в противоположных направлениях (рис.2,б).

Меньшая из частот, совпадающая с частотой колебаний одиночного маятника, называется основной частотой, а само нормальное колебание с этой частотой – ос-

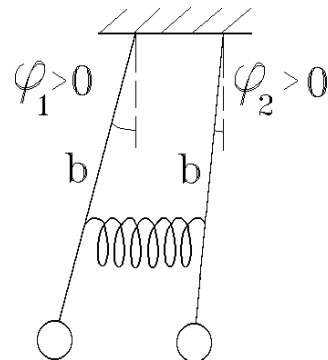


Рис. 1

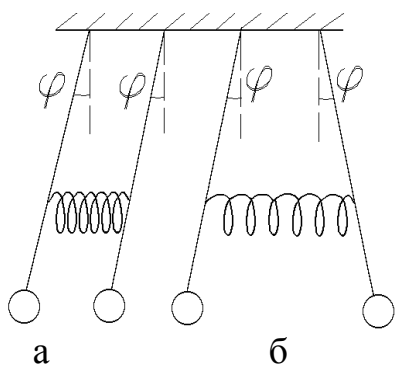


Рис. 2

новным колебанием. Постоянные A_1 , A_2 , α_1 , α_2 определяются из начальных условий.

Действительно, пусть начальные условия имеют вид:

$$1) \text{ при } t = 0 \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_o, \text{ а } \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0$$

Тогда из уравнений (5) находим: $A_2 = 0$, $A_1 = 2\varphi_o$ и $\alpha_1 = 0$, откуда следует, что в этом случае

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi_o \cos(\omega_1 t),$$

т.е. пружина всё время остаётся недеформированной (связь отсутствует). Если же маятники отклонены на один и тот же угол в разных направлениях, т.е. начальные условия имеют вид:

$$2) \text{ при } t = 0: \quad \varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi_o, \text{ а } \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0,$$

то $A_1 = 0$, $A_2 = 2\varphi_o$, $\alpha_2 = 0$ и

$$\varphi_1(t) = -\varphi_2(t) = \varphi_o \cos(\omega_2 t).$$

В этом случае связь проявляет себя максимально возможным образом (пружина деформируется наиболее сильно).

Рассмотрим теперь случай, в котором начальные условия двух маятников существенно отличаются:

$$3) \text{ при } t = 0 \quad \varphi_1 = \varphi_o, \quad \varphi_2 = 0 \text{ и по-прежнему } \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0.$$

Для углов отклонения маятников φ_1 и φ_2 получаем:

$$\varphi_1(t) = \frac{\varphi_o}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{\varphi_o}{2} \cos(\omega_2 t) = \varphi_o \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \quad (6)$$

$$\varphi_2(t) = \frac{\varphi_o}{2} \cos(\omega_2 t) - \frac{\varphi_o}{2} \cos(\omega_1 t) = \varphi_o \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \quad (7)$$

При слабой связи ($kb^2 \ll mgl$) каждая из функций φ_1 и φ_2 колеблется с частотой $(\omega_1 + \omega_2)/2$ или с периодом $T = 2T_1T_2/(T_1 + T_2)$, где $T_1 = 2\pi/\omega_1$ и $T_2 = 2\pi/\omega_2$ - периоды соответственно синфазных и противофазных колебаний системы. При этом фазы колебаний маятников отличаются на $\pi/2$. Величины же

$$\alpha_1(t) = \varphi_o \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \text{ и } \alpha_2(t) = \varphi_o \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

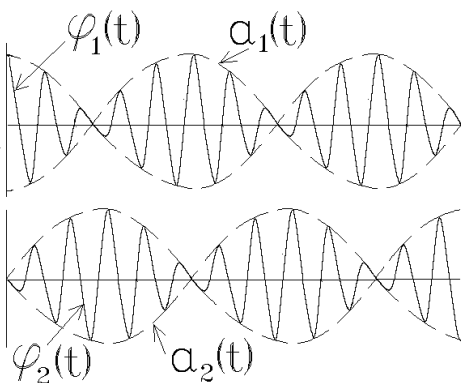


Рис. 3

можно рассматривать, как медленно меняющиеся со временем амплитуды этих колебаний. Такие колебания называют биениями (рис.3), а время

$$T_6 = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

- периодом биений. Это время, в течение которого происходит периодическая перекачка энергии от одного маятника к другому.

Методы измерений

В первой части работы проверяется соотношение между периодом биений и периодами нормальных колебаний:

$$\frac{1}{T_6} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \quad (8)$$

Все три входящих в эту формулу величины могут быть измерены непосредственно.

Во второй части работы определяется так называемый коэффициент связи:

$$\xi = \frac{kb^2}{kb^2 + mgl}, \quad (9)$$

значение которого лежит в интервале $0 \leq \xi \leq 1$. Используя формулы (4), можно выразить ξ через непосредственно измеряемые периоды нормальных колебаний T_1 и T_2 :

$$\xi = \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 + T_2^2}.$$

Если при измерениях использовать одну пружину, но при двух различных значениях параметра b , то отношение коэффициентов связи (при слабой связи, т.е. при $kb^2 \ll mgl$) $\xi_2/\xi_1 \approx (b_2/b_1)^2$, а эту пропорцию можно легко проверить на опыте.

Порядок выполнения работы

1. Проверить совпадение периодов колебаний маятников без пружины. Для этой цели маятники надо отклонить в одну сторону. Если после 50 колебаний у маятников «набегает» заметная разность фаз, то на одном из маятников необходимо переместить по стержню довесок в виде проволочной спирали и повторить проверку. Одновременно сделать контрольные измерения периода колебаний.

2. Закрепить пружину в положение 1 и определить период $T_1(1)$ синфазных колебаний, измеряя 5 раз время 20 колебаний. Рассчитать среднее значение $\langle T_2(1) \rangle$ и погрешность измерений периода $\sigma_{T_1}(1)$.

3. Аналогичным образом определить период $T_2(1)$ встречных колебаний, рассчитать среднее значение $\langle T_2(1) \rangle$ и погрешность измерений $\sigma_{T_2}(1)$.

4. Определить период $T_6(1)$ биений, измеряя 5 раз время 20 биений (если колебания будут быстро затухать, то уменьшите число биений до 15 или до 10). Рассчитать среднее значение $\langle T_6(1) \rangle$ и погрешность прямых измерений $\sigma_{T_6}(1)$.

5. Рассчитать период $T_6'(1)$ по формуле (8), подставляя вместо значений T_1 и T_2 их средние значения. Определить погрешность косвенных измерений $\sigma_{T_6'}$ и результат сравнить с опытным значением. Если $(\langle T_6 \rangle - \langle T_6' \rangle) < \sqrt{\sigma_{T_6}^2 + \sigma_{T_6'}^2}$, то различие между экспериментальным и расчетным периодом несущественны.

6. Рассчитать коэффициент связи $\xi_1(1)$ по формуле (9), а также $\sigma_{\xi(1)}$.

7. Закрепить пружину 1 в положении 2 и повторить все упражнения, перечисленные в пунктах 1 – 6.

8. Рассчитать коэффициент связи $\xi(2)$, определить отношение коэффициентов $X = \xi(2)/\xi(1)$ и отношение $Y = (b_2/b_1)^2$, а также их погрешности σ_X и σ_Y . Сравнить X и Y , сделать выводы. Если $(X - Y) < \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$, то отличие между X и Y не существенно.

9. Результаты измерений и вычислений отразить в таблицах.

Таблица 1. Пружина связи в положении 1.

№ пп	$T_1(1),$ с	$T_2(1),$ с	$T_{\delta}(1),$ с	$T'_{\delta}(1),$ с
1				
2				
3				
4				
5				
	$\langle T_1 \rangle =$	$\langle T_2 \rangle =$	$\langle T_{\delta} \rangle =$	$\langle T'_{\delta} \rangle =$
	$\sigma_{T_1} =$	$\sigma_{T_2} =$	$\sigma_{T_{\delta}} =$	$\sigma_{T'_{\delta}} =$

Таблица 2. Пружина связи в положении 2.

№ пп	$T_1(2),$ с	$T_2(2),$ с	$T_{\delta}(2),$ с	$T'_{\delta}(2),$ с
1				
2				
3				
4				
5				
	$\langle T_1 \rangle =$	$\langle T_2 \rangle =$	$\langle T_{\delta} \rangle =$	$\langle T'_{\delta} \rangle =$
	$\sigma_{T_1} =$	$\sigma_{T_2} =$	$\sigma_{T_{\delta}} =$	$\sigma_{T'_{\delta}} =$

Таблица 3.

Положение пружины	ξ	σ_{ξ}	b , м	σ_b , м	X	σ_X	Y	σ_Y
Положение 1								
Положение 2								

Контрольные вопросы

1. Колебания связанных систем. Нормальные колебания (их число в системе N связанных осцилляторов).

2. Пользуясь методом Лагранжа-Эйлера, получить уравнения колебаний двух связанных маятников.

3. Исследовать случай сильной связи ($kb^2 > mgl$).

4. Задачи 4.64; 4.65; 4.66; 4.67 (Иродов, Задачи по общей физике).

Литература

1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. - 2-е изд. – М.: Высш. шк., 1986 - 320 с.

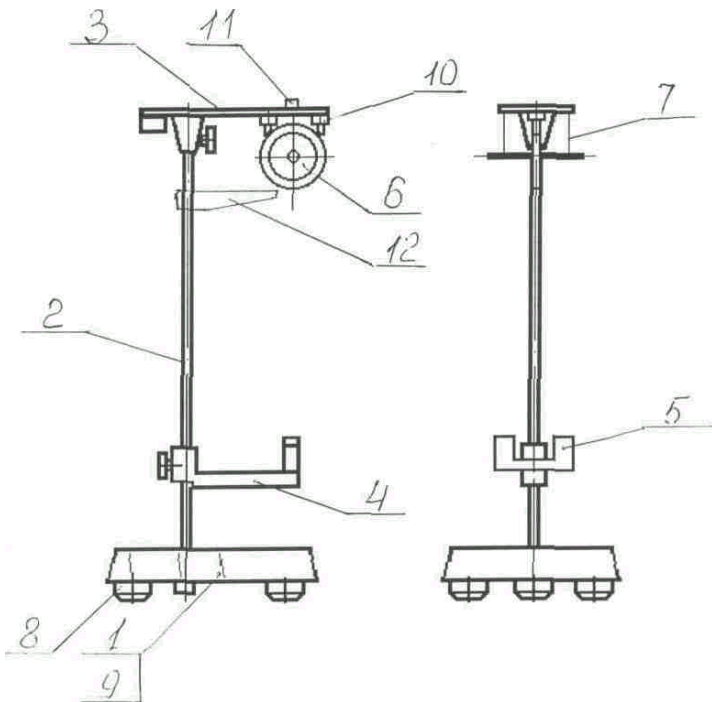
2. Зоммерфельд А. Механика (§20) -- М.: ИЛ, 1947 – 391 с.

3. Крауфорд Ф., Волны (Берклевский курс физики, т.3) – М.: Физмат, 1974 -- 528 с.

4. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. -- 2-е изд. – М.: Физмат, 1988 -- 416 с.

9. Изучение плоского движения твердого тела на примере маятника Максвелла

Устройство и принцип работы изделия



Установка представлена на рисунке и включает в свой состав: основание 1, вертикальную стойку 2, верхний кронштейн 3, кронштейн 4 для установки фотодатчика, фото датчик 5, диск 6 с осью, подвешенной на двух нитях 7, комплект из трех сменных колец с различными моментами инерции. Основание 1 снабжено тремя регулируемыми опорами 8 и зажимом 9 для фиксации вертикальной стойки 2. Вертикальная стойка 2 выполнена из металлической трубы, на которую нанесена миллиметровая шкала, и имеет визир 12. На верхнем кронштейне 3 размещаются электромагниты 10 и узел 11 регулировки исходного положения маятника. Кронштейн 4 имеет зажим для крепления на вертикальной стойке 2 и элементы фиксации фотодатчика.

Вертикальная стойка 2 выполнена из металлической трубы, на которую нанесена миллиметровая шкала, и имеет визир 12. На верхнем кронштейне 3 размещаются электромагниты 10 и узел 11 регулировки исходного положения маятника. Кронштейн 4 имеет зажим для крепления на вертикальной стойке 2 и элементы фиксации фотодатчика.

Содержание работы

Уравнения движения маятника без учета сил трения имеют вид:

$$\begin{cases} ma = mg - 2T \\ I\varepsilon = 2TR_0 \\ a = \varepsilon \cdot R_0 \end{cases} \quad (1)$$

где m – масса маятника, I – момент инерции маятника, g – ускорение свободного падения, R_0 – радиус стержня, T – сила натяжения одной нити, a – ускорение поступательного движения центра масс маятника, ε – угловое ускорение маятника. Решая систему уравнений (1) определяем значение ускорения по формуле:

$$a_T = \frac{g}{1 + I/mR_0^2} \quad (1a)$$

Момент инерции маятника I определяем по формуле:

$$I = I_0 + I_d + I_k \quad (2)$$

Момент инерции оси маятника I_0 определяем по формуле:

$$I_0 = m_0 R_0^2 / 2 \quad (3)$$

где R_0 – радиус оси; $m_0 = 0,019$ кг - масса оси;

Момент инерции диска маятника I_d определяем по формуле:

$$I_d = m_d R_d^2 / 2 \quad (4)$$

где R_d – радиус диска. m_d – масса диска.

Момент инерции кольца маятника I_k определяем по формуле:

$$I_k = m_k \left(R_k^2 + b^2 / 4 \right) \quad (5)$$

где R_k – средний радиус кольца; m_k – масса кольца, кг; b – ширина кольца, м.

Выполнение работы

1. Установить нижний кронштейн с фотодатчиком в крайнее нижнее положение шкалы так, чтобы плоскость кронштейна, окрашенная в синий цвет, совпала с одной из рисок шкалы.

Произвести регулировку положения основания при помощи регулировочных опор так, чтобы диск на бифилярном подвесе находился в центре окна фотодатчика.

Установить с помощью узла регулировки 11 необходимую длину бифилярного подвеса таким образом, чтобы нижний край среза сменного кольца маятника находился на 4 - 5 мм ниже оптической оси фотодатчика; при этом ось маятника должна занимать горизонтальное положение.

Подключить фотодатчик и электромагниты установки к блоку электронному при помощи кабеля. Вилку с маркировкой "Ф" вставить в розетку фотодатчика, а вилку с маркировкой "Э" в розетку электромагнитов.

Нажать кнопку "СЕТЬ". При этом должно включиться табло индикации и должны включиться электромагниты.

Вращая маятник по часовой стрелке (см. рис.), зафиксировать его в верхнем положении при помощи левого (ближнего к стойке) электромагнита, при этом необходимо следить за тем, чтобы нить наматывалась на ось виток к витку. При вращении маятника против часовой стрелки фиксировать маятник необходимо при помощи правого (дальнего от стойки) электромагнита.

Нажать кнопку "СБРОС" для того, чтобы убедиться, что на табло устанавливаются нули.

2. При нажатии кнопки "ПУСК" на блоке электромагниты должны обесточиться, маятник должен начать раскручиваться, таймер должен произвести отсчет времени, а в момент пересечения маятником оптической оси фотодатчика отсчет времени должен прекратиться. Записать показания таймера, т.е. время движения груза t . При помощи визира по шкале вертикальной стойки определить ход маятника h . Нажать кнопку "СБРОС". Привести маятник в исходное положение (зафиксировать в верхнем положении при помощи электромагнита). Повторить опыт 5 раз. Определить экспериментальное значение ускорения по формуле:

$$a_g = 2h / t^2 \quad (6)$$

Сравните экспериментальное и теоретическое значение ускорений с учетом погрешностей эксперимента. Если $|a_T - a_g| < \sqrt{\sigma_T^2 + \sigma_g^2}$, то различие в величинах несущественны.

Контрольные вопросы

1. Описать маятник Максвелла. Почему это устройство называется маятником ?
2. Дать определение момента инерции твердого тела.
3. Получить выражение для момента инерции диска, кольца.

4. Вывести расчетную формулу для момента инерции маятника Максвелла.
5. Как изменится ускорение a_c и сила T при увеличении момента инерции маятника?
6. Сравнить значения a_c и силы T при движении маятника вверх и вниз.
8. Какое движение твердого тела называется плоским ?

10. Измерение момента инерции твердого тела методом крутильных колебаний

Цель работы - исследование крутильных колебаний и измерение момента инерции тела сложной формы.

Содержание работы

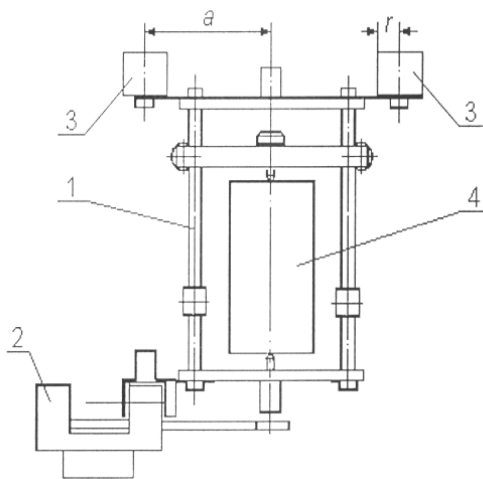
Момент инерции I это величина, характеризующая инертность тела при вращательном движении. Величину I можно определить из основного закона динамики вращательного движения:

$$I = \frac{M}{\varepsilon} \quad (1)$$

где M – момент сил, приложенных к телу; ε – его угловое ускорение.

Величина I зависит от размеров, формы и массы тела. Исследуемым телом в данной работе является образец в форме параллелепипеда.

Схема установки представлена рис. 1.



Рамка 1 закреплена на натянутой стальной проволоке, проходящей по ее геометрической оси. Если рамку повернуть на некоторый угол φ , то происходит закручивание проволоки. Тогда силы упругости стремятся вернуть рамку в исходное положение. Момент M возвращающей силы при относительно малом угле поворота φ связан с ним соотношением

$$M = -D\varphi, \quad (2)$$

где D – коэффициент, называемый модулем кручения проволоки. Величина D зависит от длины проволоки, её диаметра и модуля сдвига, характеризующего упругие свойства материала проволоки. Из формул (1) и (2) получаем дифференциальное уравнение, описывающее движение рамки:

$$I\varphi'' = -D\varphi, \text{ или } \varphi'' + \omega_0^2\varphi = 0 \quad (3)$$

где $\omega_0 = \sqrt{D/I}$.

Решением уравнения (3) для угла φ является гармоническое колебание $\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$ с периодом T :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \quad (4)$$

Таким образом, исследуемое тело совершает крутильные колебания. В принципе, момент инерции I можно найти на основе соотношения (4), если знать величину D . В данной работе определение модуля кручения D не требуется. Измеряется период колебания T пустой рамки с моментом инерции I . Затем определяется период T_1 колебаний системы, состоящей из рамки с установленными на нее грузами 3 с известным моментом инерции I_0 . Тогда, согласно формуле (4), имеем

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I + I_0}{D}} \quad (5)$$

Исключая из формул (4) и (5) величину D , получаем формулу для расчета момента инерции I исследуемого тела

$$I = I_0 \frac{T^2}{T_1^2 - T^2} \quad (6)$$

Период колебаний T - это продолжительность одного полного колебания. Величину T можно измерить как время между двумя последовательными прохождениями рамкой положения равновесия в одном и том же направлении. Для повышения точности измерения T его находят, измеряя длительность t некоторого числа N полных колебаний. Тогда

$$T = \frac{t}{N} \quad (7)$$

Выполнение работы

1. Установить рамку так, чтобы в положении равновесия флажок рамки находился между окнами фотодатчика 2 (см. рис.). Установить электромагнит в положение, приблизительно соответствующее 40° по угловой шкале. Включить электропитание нажатием кнопки "СЕТЬ". Затем повернуть рамку так, чтобы она удерживалась в исходном положении электромагнитом. Нажать кнопку "ПУСК".

2. Измерить длительность времени t для числа полных колебаний рамки $N = 20$. Повторить опыт 4-5 раз. Определить период колебаний рамки T .

3. Установить два груза 3 на планку. Определить период колебаний T_1 рамки с грузами.

4. Определить момент инерции рамки по формуле (6), где

$$I_0 = 2m \left(\frac{r^2}{2} + a^2 \right), \quad m - \text{масса груза, } r = 0,015 \text{ м} - \text{радиус груза, } a = 0,052 \text{ м} - \text{расстояние от оси вращения рамки до оси грузов.}$$

5. Снять грузы, установить исследуемый образец 4 в рамке и закрепить специальными винтами так, чтобы одна из его геометрических осей совпадала с осью рамки. Определить период колебаний T_2 рамки с образцом. Определить момент инерции исследуемого образца по формуле:

$$I_0 = I_p \left(\frac{T_2^2}{T^2} - 1 \right) \quad (9)$$

Рассчитать теоретический момент инерции образца I_0 по формуле

$$I_{0T} = \frac{m}{12} (a^2 + b^2) \quad (10)$$

где a и b - длины сторон параллелепипеда, расположенные в горизонтальной плоскости, m - масса образца.

6. Рассчитать погрешности вычислений I_0 и I_{0T} . Сравнить результаты экспериментального определения момента инерции образца с расчетом. Если

$|I_0 - I_{0T}| < \sqrt{\sigma_{I_0}^2 + \sigma_{I_{0T}}^2}$, то два значения различаются несущественно.

Контрольные вопросы

1. Вывести формулу (10).

2. Сформулировать теорему Штейнера.

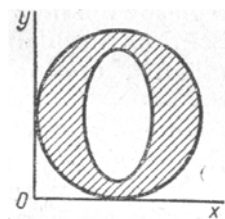
3. Вывести формулу для момента инерции грузов 3: $I_0 = 2m \left(\frac{r^2}{2} + a^2 \right)$

4. Из сплошного однородного цилиндра сделали полый, удалив половину массы. Как изменился момент инерции цилиндра относительно его оси?

5. По кольцу растекается капля жидкости. Как при этом изменяется момент инерции жидкости относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр?

6. Как изменится момент инерции свинцового цилиндра относительно его оси, если цилиндр сплющить в диск?

7. Сравнить моменты инерции однородного диска с вырезом относительно осей Ox и Oy (см. рис.)



11. Определение скорости полета «пули» баллистическим методом с помощью унифилярного подвеса

Цель работы - определение скорости полета «пули» с помощью крутильного маятника на основе закона сохранения момента количества движения.

Описание установки

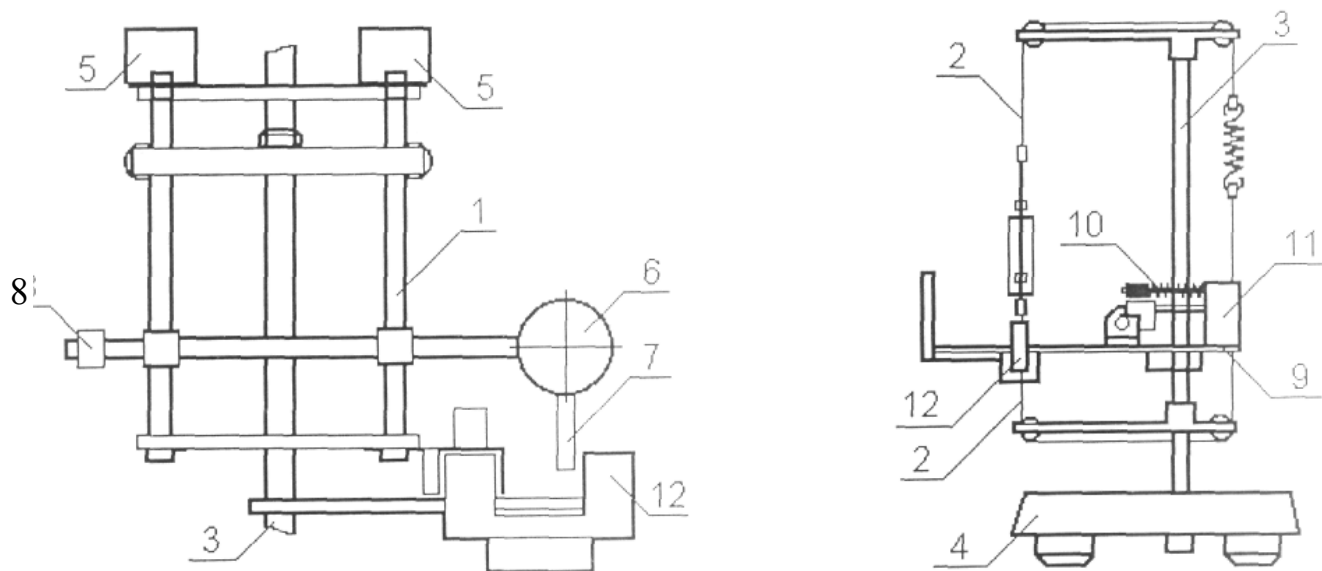


Рис.1

Основным элементом установки (см. рис. 1) является крутильный маятник, представляющий собой металлическую рамку 1, подвешенную на стальной нити 2. Нить подвеса закреплена вертикально в натянутом состоянии на стойке 3 с основанием 4. Рамка может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси, проходящей через ее ось симметрии. На ней имеются места для крепления двух дополнительных грузов 5 симметрично относительно оси. К ней же крепится «мишень» 6 в виде диска, поверхность которого покрыта тонким слоем пластилина, флажок 7 для контроля ее колебаний и противовес 8. «Пулей» служит тонкое металлическое кольцо. К стойке на кронштейне 9 крепится «пистолет», состоящий из направляющего стержня с пружиной 10 и спускового устройства 11. К стойке также на кронштейне крепится фотодатчик 12 (лампа + фотоприёмник), соединенный с электронным блоком регистрации времени и числа колебаний.

Принцип действия лабораторной установки

После выстрела «снаряд» попадает в «мишень» и прилипает к ее поверхности (см. рис.2.). Соударение снаряда с мишенью происходит за столь короткое время, что поворотом рамки с «мишенью», а, следовательно, и действием момента сил упругости нити за это время можно пренебречь. Момент силы тяжести и силы натяжения нити относительно вертикальной оси равен нулю. Таким образом, относительно этой оси суммарный момент внешних сил, действующий на рамку и «снаряд»,

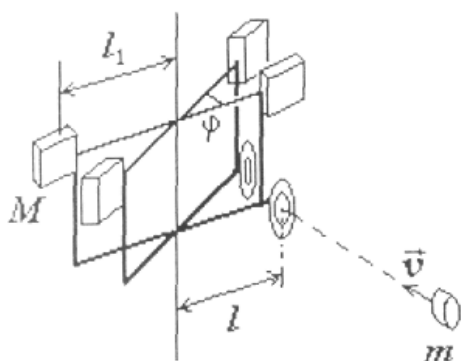


Рис. 2

равен нулю и при соударении выполняется закон сохранения суммарного момента импульса рамки и «снаряда».

Момент импульса «снаряда» перед соударением $L_1 = mvl$, где m – масса «снаряда», v – его скорость, l – прицельное расстояние (рис. 2). После соударения рамка с грузами приходит во вращение с угловой скоростью ω , при этом ее момент импульса

$$L_2 = (I_p + 2Ml_1^2)\omega \quad (1)$$

Здесь I_p – момент инерции рамки без грузов, M – масса каждого из грузов, l_1 – расстояние до грузов от оси вращения. Вкладом в момент инерции прилипшего «снаряда» можно пренебречь из-за малости его массы.

По закону сохранения $L_1 = L_2$, следовательно:

$$v = \frac{(I_p + 2Ml_1^2)\omega}{ml} \quad (2)$$

Чтобы воспользоваться этой формулой, нужно найти угловую скорость рамки со и момент инерции рамки с грузами $(I_p + 2Ml_1^2)$.

Угловую скорость можно найти по углу максимального отклонения φ_m рамки после соударения. После соударения вращение рамки тормозится под действием момента упругих сил в нити подвеса. При этом выполняется закон сохранения энергии. Кинетическая энергия рамки переходит в потенциальную энергию закрученной нити:

$$\frac{(I_p + 2Ml_1^2)\omega^2}{2} = \frac{D\varphi_m^2}{2} \quad (3)$$

где D – модуль кручения проволоки. Модулем кручения называется коэффициент пропорциональности между моментом упругих сил $M_{упр}$ и углом закручивания нити φ :

$$M_{упр} = -D\varphi$$

Знак минус здесь показывает, что направление момента упругих сил противоположно углу закручивания.

Из соотношения (3) находим выражение для угловой скорости:

$$\omega = \varphi_m \sqrt{\frac{D}{(I_p + 2Ml_1^2)}} \quad (4)$$

Модуль кручения D и момент инерции $(I_p + 2Ml_1^2)$ определяют значение периода колебаний рамки. Их отношение, а также необходимый для вычисления скорости момент инерции рамки с грузами можно найти из измерений периода колебаний рамки с грузами и без них. Для того чтобы понять, как связан период с этими величинами, рассмотрим уравнение вращения рамки, подвешенной на упругой нити:

$$I\ddot{\varphi} = -D\varphi.$$

Здесь I - момент инерции рамки в общем случае, $\ddot{\varphi}$ – вторая производная от угла по времени, т.е. угловое ускорение. Это уравнение приводится к виду

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2 \varphi, \quad (5)$$

где $\omega_0 = \sqrt{D/I}$. Уравнение (5) описывает гармонические колебания с циклической частотой колебаний ω_0 . Период колебаний вычисляется по формуле

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \quad (6)$$

Обозначив период колебаний рамки без грузов T_1 , с грузами T , по формуле (6) имеем:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_p}{D}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I_p + 2Ml_1^2}{D}} \quad (7)$$

Из этих формул получим для угловой скорости (4) следующее выражение:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \cdot \varphi_m. \quad (8)$$

Исключая модуль кручения из формул (7) находим момент инерции рамки с грузами:

$$I_p + 2Ml_1^2 = \frac{2Ml_1^2 T^2}{T^2 - T_1^2}. \quad (9)$$

Подстановка соотношений (8) и (9) в уравнение (2) дает окончательную формулу:

$$v = \frac{4\pi Ml_1^2 T \varphi_m}{ml(T^2 - T_1^2)} \quad (10)$$

Порядок выполнения работы

1. Произведите регулировку положения основания с помощью регулировочных опор. Добейтесь вертикальности нити подвеса.
2. Установите грузы на рамке.
3. Установите «мишень» на рамке. Убедитесь, что «мишень» находится на линии «выстрела» и перпендикулярна ей, а флажок пересекает при колебаниях рамки оптическую ось фотодатчика.
4. Установите «снаряд» на направляющий стержень «пушки», взведите пружину и произведите «выстрел». Визуально определите угол φ_m максимального отклонения рамки по шкале угловых перемещений с помощью флажка, закрепленного на рамке. Повторите «выстрел» и измерение угла максимального отклонения не менее пяти раз. Вычислите среднее значение угла максимального отклонения при выстреле $\langle \varphi_m \rangle$.
5. Измерьте штангенциркулем расстояние l от оси вращения рамки до центра отпечатка «пули» в мишени.
6. Отклоните рамку с грузами на угол 40° градусов и зафиксируйте с помощью электромагнита. Нажмите на электронном блоке кнопку «СБРОС», при этом должны обнулиться показания счетчиков колебаний и времени. Нажмите кнопку

«ПУСК», при этом выключится электромагнит, и начнутся крутильные колебания рамки. Определите время t , за которое происходит $N=20$ колебаний рамки.

7. Измерьте штангенциркулем расстояние l_1 от оси вращения рамки до центров грузов.

8. Снимите грузы с рамки и аналогично п.6. проведите измерения времени t_1 , за которое происходит $N_1=20$ колебаний рамки без грузов.

9. С помощью лабораторных весов определите массы грузов M массу снаряда m .

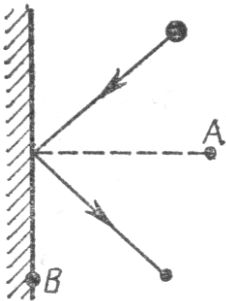
10. Вычислите периоды колебания рамки с грузами и без грузов:

$$T = t/N, \quad T_1 = t_1/N_1.$$

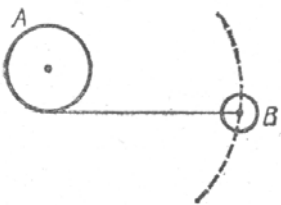
11. Используя среднее значение угла $\langle \varphi_m \rangle$, вычислите по формуле (10) скорость снаряда v .

Контрольные вопросы

1. Сформулировать закон сохранения момента импульса. Можно ли считать, что в данной работе сохраняется момент импульса? Почему?
2. Сформулировать закон сохранения энергии. Можно ли считать, что в данной работе сохраняется энергия? Почему?
3. Сохраняется ли момент импульса спутника, находящегося на орбите Земли? Почему?
4. Луна движется вокруг Земли по круговой орбите. Отличны ли от нуля на половине орбиты: а) изменение импульса; б) работа силы тяготения?



5. Шарик абсолютно упруго ударяется о стенку (см. рис.). Сохраняется ли момент импульса шарика: а) относительно точки А; б) относительно точки В?



6. На вертикальный вал А наматывается нить с грузом В. Груз вращается вокруг вала в горизонтальной плоскости (см. рис.) Как изменяется момент импульса груза относительно оси вала?

12. Определение ускорения свободного падения с помощью машины Атвуда

Цель работы - изучение законов равноускоренного движения.

Содержание работы

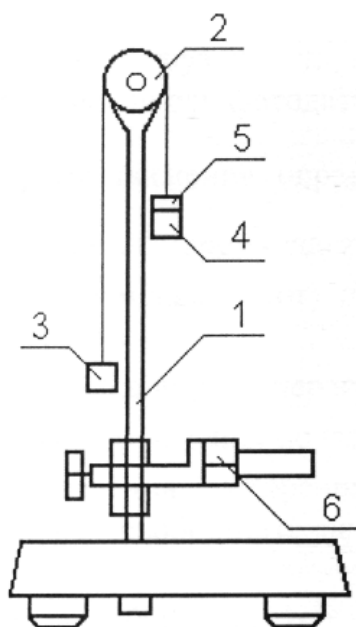


Рис. 1

Машина Атвуда (рис. 1) состоит из укрепленного на штативе 1 блока 2, через который перекинута нить с подвешенными на ней одинаковыми грузами 3 и 4. Масса этих грузов может быть увеличена добавочными небольшими грузами (перегрузками) 5. Если на груз массы m положить перегрузок с массой m_1 , то вся система начнет двигаться равноускоренно.

На груз 3 и груз 4 с перегрузком 5 будут действовать две силы: сила тяжести и сила натяжения нити. При этом если масса блока невелика по сравнению с m , и трение мало, то раскручивание блока практически не требует приложения к нему крутящего момента и силы натяжения нити по обе стороны блока равны друг другу. На основании второго закона Ньютона можно написать

$$\begin{cases} (m + m_1) a = (m + m_1) g - T \\ -ma = mg - T \end{cases} \quad (1)$$

где a – ускорение системы, T - натяжение нити, g - ускорение свободного падения. Решение этих уравнений дает величину натяжения нити и величину ускорения:

$$T = \frac{2mg(m + m_1)}{2m + m_1} \quad (2)$$

$$a = \frac{m_1 g}{2m + m_1} \quad (3)$$

$$\text{Отсюда} \quad g = a \frac{2m + m_1}{m_1} \quad (4)$$

Порядок выполнения работы

1. Перекинуть через блок 2 нить с двумя грузами 3 и 4 и убедиться, что система находится в положении безразличного равновесия.

2. Установить кронштейн с фотодатчиком 6 в нижней части шкалы вертикальной стойки, а фотодатчик расположить таким образом, чтобы правый груз при движении вниз проходил в центре рабочего окна фотодатчика (за нижнее положение груза берется риска шкалы, соответствующая риске на корпусе фотодатчика и являющаяся как бы продолжением оптической оси фотодатчика, которую пересекает движущийся груз). Установить правый груз в крайнем верхнем положении.

3. Положить на правый груз один из перегрузков 5. Нажать на кнопку «ПУСК» блока. Происходит растормаживание электромагнита, правый груз начинает опус-

каться, и таймер блока начинает отсчет времени. При пересечении правым грузом оптической оси фотодатчика отсчет времени прекратится. Записать показания таймера, т.е. время движения грузов.

4. Определить по шкале пройденный грузом путь S , как расстояние от нижней плоскости груза (в верхнем положении) до оптической оси фотодатчика.

5. Не меняя первоначальной высоты груза, повторить опыт 5 раз. Найти среднее время движения $\langle t \rangle$.

6. Определить значение ускорения $a = \frac{2S}{\langle t \rangle^2}$ и его погрешность.

7. Повторить измерения по пп. 2 – 6 с другим перегрузком.

8. Определить ускорение свободного падения по формуле (4) и его погрешность.

Контрольные вопросы

1. При движении грузов нить действует и на груз 3 и на блок 2. Равны ли эти силы по модулю? почему?
2. Равны ли силы натяжения правой и левой нити?
3. Рассчитать силу давления блока на ось.
4. Найти силу давления перегрузка 5 на груз 4.

13. Определение коэффициентов трения качения и трения скольжения с помощью наклонного маятника

Цель работы - определение коэффициентов трения скольжения и трения качения стального шара по стальной пластине.

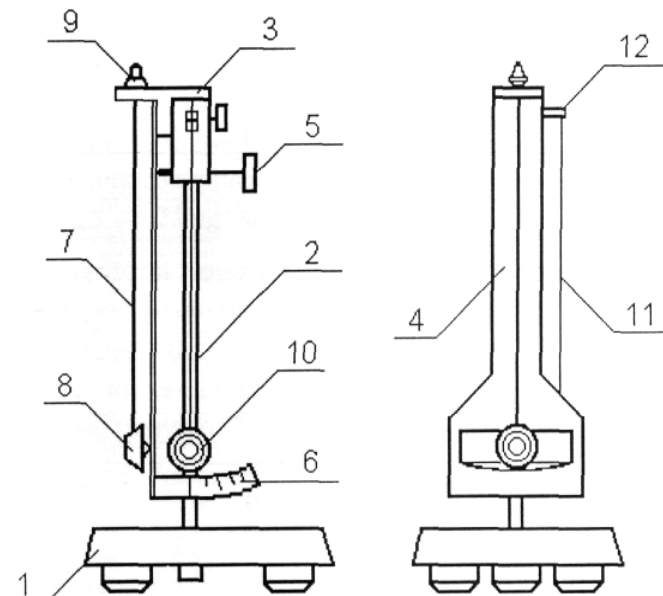


Рис. 1

Описание установки

Схема установки показана на рис. 1. На основании 1 укреплена стойка 2, к верхней части которой на кронштейне 3 крепится наклонная платформа 4. Угол платформы к вертикали можно изменять с помощью винта 5. Значение этого угла определяется по шкале 6. В верхней части платформы крепится наклонный маятник. При измерении коэффициента трения скольжения в качестве маятника используется стержень 7 с обоймой 8, в которой закрепляется усеченный стальной шар. Опора 9 на верхнем конце стержня 7 позволяет ему свободно отклоняться в плоскости, параллельной платформе 4. При измерении

коэффициента трения качения маятником служит стальной шар 10, подвешенный на тонкой неупругой нити 11. Шар с нитью используется также для контроля вертикальности стойки 2, в этом случае его подвешивают на кронштейн 12.

Принцип действия лабораторной установки

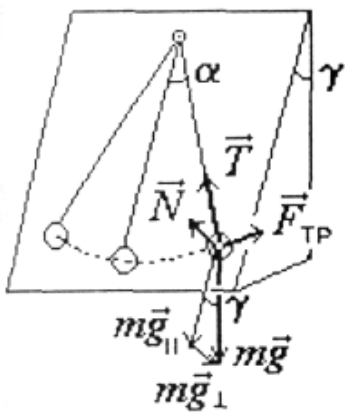


Рис. 2

Если маятник отклонить вдоль наклонной плоскости на некоторый угол и отпустить, то начнутся колебания, которые будут затухать под действием силы трения маятника о плоскость, сопротивления среды и трения в подвесе маятника. Основной причиной в данном случае будет интересующее нас трение о плоскость. Двумя другими силами трения можно пренебречь.

Пусть масса маятника m . Основные силы, действующие на маятник в отклоненном положении, изображены на рисунке 2. Их четыре: сила тяжести mg , сила N нормальной реакции плоскости, сила F_{TP} трения о плоскость и сила T натяжения подвеса. Сила трения связана

с силой реакции плоскости законом

$$F_{TP} = kN, \quad (1)$$

где k - коэффициент трения.

Разложим силу тяжести на компоненты mg_{\parallel} , параллельную плоскости, и mg_{\perp} , перпендикулярную плоскости. Сила N нормальной реакции уравновешивает компоненту mg_{\perp} , следовательно, эти два вектора равны по величине: $N = mg_{\perp} = mg \cdot \sin \gamma$ и для силы трения получается выражение

$$F_{TP} = k mg \cdot \sin \gamma.$$

Обозначим начальный угол отклонения маятника вдоль плоскости α_0 , максимальный угол в противоположную сторону (через половину периода) $\alpha_{1/2}$, угол отклонения через период – α_1). При медленном убывании амплитуды потери энергии за каждый период приблизительно одинаковы и $\alpha_{1/2} = (\alpha_0 + \alpha_1)/2$. За период точка касания маятника проходит путь $S = l \cdot (\alpha_0 + 2\alpha_{1/2} + \alpha_1) = 2l \cdot (\alpha_0 + \alpha_1)$. При этом сила трения совершает работу

$$A_{mp} = -F_{TP} \cdot S = -2kmg l \sin \gamma (\alpha_0 + \alpha_1) \quad (2)$$

На величину этой работы уменьшается полная механическая энергия маятника. В крайних положениях эта энергия состоит только из потенциального вклада mgh , поэтому

$$A_{TP} = mgh_0 - mgh_1, \quad (3)$$

где h_0, h_1 – высоты подъема маятника в крайнем положении, соответствующие углам α_0, α_1 .

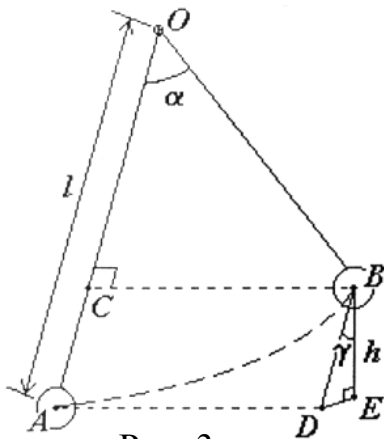


Рис. 3

С помощью рисунка 3. найдем, как высота подъема h связана с углом α отклонения маятника. В отклоненном положении центр тяжести маятника поднят вдоль плоскости на отрезок $BD = AC = l(1 - \cos \alpha)$. Из треугольника BDE получаем: $h = BD \cos \gamma = l \cdot \cos \gamma (1 - \cos \alpha) = 2l \cos \gamma \cdot \sin^2(\alpha/2) \approx l \cos \gamma \cdot \alpha^2/2$.

Последнее приближенное равенство справедливо при малых углах, в этом случае $\sin(\alpha/2) \approx \alpha/2$. Подставляя выражение для каждой из высот в уравнение (3) и учитывая формулу (2) получим:

$$-2mg l \sin \gamma (\alpha_0 + \alpha_1) = mg l \cos \gamma \left(\alpha_1^2/2 - \alpha_0^2/2 \right)$$

Сократив с обеих сторон равенства одинаковые множители, получим следующее выражение:

$$k = \operatorname{ctg} \gamma (\alpha_0 - \alpha_1)/4. \quad (4)$$

Рассмотрим n последовательных колебаний наклонного маятника. Формула аналогичная (4) будет справедлива для каждого из n периодов:

$$k = \operatorname{ctg} \gamma (\alpha_0 - \alpha_1)/4; k = \operatorname{ctg} \gamma (\alpha_1 - \alpha_2)/4; \dots k = \operatorname{ctg} \gamma (\alpha_{n-1} - \alpha_n)/4; \quad (5)$$

Здесь $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ угловые амплитуды отклонения после второго, третьего, ..., n -го периода колебаний. Сложим все формулы (5). В правой части все промежуточные углы $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}$ сократятся. После деления на число периодов n получим окончательную формулу для определения коэффициента трения:

$$k = \operatorname{ctg} \gamma (\alpha_0 - \alpha_n)/4n \quad (6)$$

В том случае, когда маятник представляет собой шарик, катящийся без проскальзывания по наклонной платформе, основной диссипативной силой служит сила $F_{\text{тр.к.}}$ трения качения. Тормозящий момент силы трения качения пропорционален силе нормальной реакции, т. е.

$$F_{\text{тр.к.}} R = k_1 N, \quad (7)$$

где k_1 - коэффициент трения качения, имеющий размерность длины, R - радиус кривизны катящегося тела. Рассуждения, приведенные выше для трения скольжения, можно повторить для трения качения, используя вместо формулы (1) соотношение (7). При этом для коэффициента трения качения получим

$$k_1 = \operatorname{ctg} \gamma (\alpha_0 - \alpha_n) R / 4n \quad (8)$$

Порядок выполнения работы

1. Используя маятник качения в качестве отвеса, при помощи регулировочных опор основания выставить стойку установки в строго вертикальное положение.

2. Установить одну из сменных пластин на платформу 4. При необходимости подрегулировать положение основания так, чтобы указатель маятника оказался против нулевого деления шкалы отсчета угла отклонения маятника, но без нарушения вертикальности стойки.

3. Установить угол γ наклона платформы равный 2° .

4. Вставить усеченный шар в обойму маятника скольжения сферической поверхностью наружу. Подвесить маятник скольжения при помощи призматической опоры на верхний кронштейн таким образом, чтобы усеченный шар соприкоснулся с установленной на платформу пластиной, и ось маятника была параллельна лицевой поверхности платформы.

5. Отвести маятник в одно из крайних положений и записать начальный угол отклонения α_0 .

6. Отпустить маятник без толчка и записать угол α_n максимального отклонения после совершения им $n = 20$ полных колебаний.

7. Повторить измерения п.п. 5,6 пять раз при одном и том же начальном угле α_0 и количестве колебаний n . Найти среднее значение угла α_n отклонения после n колебаний.

8. Перевести углы α_0 и среднее значение угла α_n в радианную меру. Вычислить по формуле (6) коэффициент k трения скольжения между шаром и пластиной.

9. Снять маятник скольжения: Установить маятник качения так, чтобы в равновесии указатель маятника оказался напротив нулевого деления отсчета углов α . Выбрать такой угол α_0 начального отклонения шарик, чтобы шарик катался по пластине без проскальзывания. Записать выбранное значение α_0 .

10. Провести измерения аналогично пп. 6,7.

11. Измерить штангенциркулем диаметр D шара маятника качения. Вычислить радиус шара $R = D/2$.

12. Определить коэффициент трения качения по формуле (8)

Контрольные вопросы

1. Какие существуют виды сил трения? В чем отличие между ними?
2. Физический смысл коэффициента трения качения и трения скольжения.
3. Почему тепловоз может тянуть за собой состав намного большей массы, чем он сам? Ведь сила трения, действующая на состав, пропорциональна весу состава.
4. На гладкой горизонтальной поверхности лежит шероховатая доска, на ней лежит брусок. Доску начинают двигать в горизонтальном направлении. Действует ли сила трения на брусок? на доску? в каком направлении?
5. Какая сила создает горизонтальное ускорение машины при старте?

14. Определение модуля Юнга методом изгиба

Цель работы - изучение упругих деформаций различных материалов.

Содержание работы

Если прямой упругий стержень обоими концами свободно положить на твердые опоры и нагрузить в середине грузом весом P , то середина стержня опустится, т. е. стержень согнется (рис. 1).

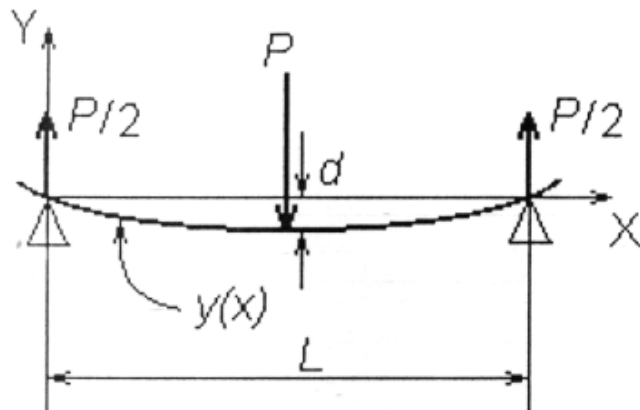


Рис. 1

Легко понять, что при таком изгибе верхние слои стержня будут сжиматься, нижние - растягиваться, а некоторый средний слой, который называют нейтральным слоем, сохранит длину и только претерпит искривление. Перемещение d , которое получает середина стержня, называется *стрелой прогиба*. Стрела прогиба тем больше, чем больше нагрузка, и, кроме того, она должна зависеть от формы и размеров

стержня и от его модуля упругости. Для деформаций растяжения и сжатия модуль упругости называется *модулем Юнга* и численно равен напряжению (т. е. упругой силе, приходящейся на единицу площади поперечного сечения тела), возникающему в образце при увеличении (уменьшении) его длины в два раза.

Найдем связь между стрелой прогиба и характеристиками упругого стержня. В данной работе используется пластина прямоугольного сечения размерами L (длина), h (высота), b (ширина). Под воздействием внешней силы пластина искривляется, и ее форма может быть описана функцией $y(x)$ (см. рис. 1). Возникающие в пластине силы упругости пропорциональны *кривизне* пластины, т. е. второй производной $y''(x)$. Условие равновесия имеет вид:

$$EIy''(x) = M(x), \quad (1)$$

где E – модуль Юнга; $I = \frac{bh^3}{12}$ – коэффициент, определяемый геометрией пластины;

$M(x) = \frac{P}{2}x$ – изгибающий момент.

Таким образом, получаем дифференциальное уравнение для формы пластины:

$$y''(x) = \frac{P}{2EI}x, \text{ интегрируя которое, находим: } y'(x) = \frac{P}{4EI}x^2 + C.$$

Постоянную интегрирования C определим из условия равенства нулю наклона пластины в ее центре: $y'(L/2) = 0$, откуда $C = -\frac{PL^2}{16EI}$. После второго интегрирования имеем:

$$y(x) = \frac{Px^3}{12EI} - \frac{PL^2x}{16EI} \quad (2)$$

Стрела прогиба d по модулю равна смещению середины пластины:

$d = -y(L/2) = \frac{PL^3}{4Ebh^3}$, откуда окончательно:

$$E = \frac{PL^3}{4dbh^3} \quad (3)$$

Порядок выполнения работы

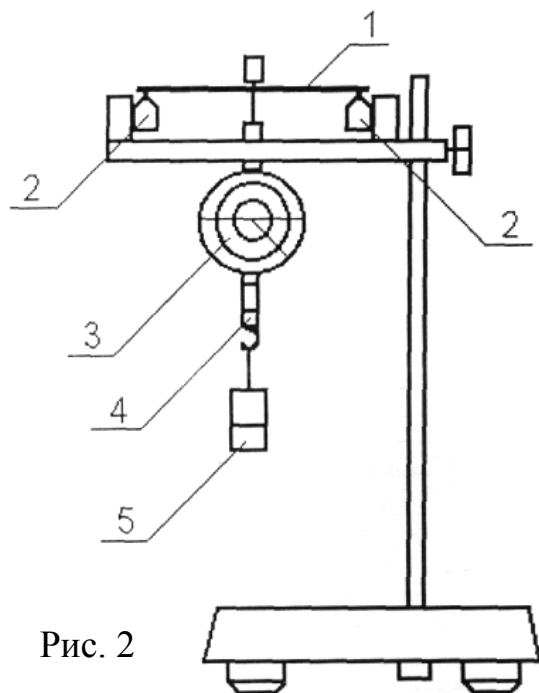


Рис. 2

1. Установить одну из исследуемых пластин 1 на призматические опоры 2 (см. рис. 2). Установить часовой индикатор 3 таким образом, чтобы его наконечник коснулся пластины.

2. Повесить на скобу 4 гири 5 массой m . По шкале индикатора определить величину прогиба. Для повышения точности повторить измерения 5 раз.

3. Повторить задание п. 2, увеличивая массу гири с помощью дополнительных грузов. Всего провести измерения для 4 значений m .

4. Измерить штангенциркулем размеры пластины.

5. Вычислить модуль Юнга исследуемого вещества по формуле (3) при каждой массе гири. Рассчитать погрешность результата.

Контрольные вопросы

1. Что такое ось изгиба?
2. Что такое нейтральная линия?
3. Что такое стрела прогиба?
4. Что такое напряжение? Тангенциальное и нормальное напряжение.
5. Что такое натяжение и давление? Чем отличаются эти понятия?
6. Из круглого бревна диаметра D требуется изготовить балку прямоугольного поперечного сечения, чтобы ее изгиб был минимальным. Определить ширину a и толщину h такой балки.

Литература

1. Д.В.Сивухин "Общий курс физики", том I "Механика", гл. X, §§74, 75, 80

15. Градуировка шкалы генератора.

Цель работы

Изучить сложение взаимно перпендикулярных колебаний, получить фигуры Лиссажу и с их помощью проградуировать шкалу звукового генератора.

Теоретическое введение

Градуировкой шкал приборов называется операция, при помощи которой делениям шкалы приборов придают значения, выраженные в установленных единицах измерения.

В данной работе градуируется шкала звукового генератора в единицах частоты – герцах (Гц). Зависимость между делениями шкалы звукового генератора и единицей измерения определяется посредством сравнения частоты его колебаний с эталонной частотой. В качестве эталона частоты принимается частота колебаний напряжения переменного тока в городской сети ($\nu_y = 50$ Гц). Сравнение частот звукового генератора и эталонной частоты осуществляется путем получения и наблюдения на экране осциллографа устойчивых во времени фигур Лиссажу известной конфигурации (см. рис.2).

Для наблюдений фигур Лиссажу используется осциллограф. На вертикально отклоняющие пластины электронно-лучевой трубки осциллографа (вход у) подаются эталонные колебания напряжения с частотой $\nu_y = 50$ Гц от сети переменного тока (от клемм “Вход” звукового генератора). На горизонтально отклоняющие пластины электронно-лучевой трубки осциллографа (“Вход х”) подаются колебания напряжения частотой ν_x с клемм “Выход” звукового генератора, шкалу которого необходимо проградуировать.

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Пусть точка участвует в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях:

$$x = A_x \cos 2\pi \nu_x t, \quad (1)$$

$$y = A_y \cos(2\pi \nu_y t + \alpha_o) \quad (2)$$

где x, y – смещения точки вдоль осей x и y в момент времени t ; A_x, A_y – амплитуды колебаний; ν_x, ν_y – частоты колебаний в направлениях x и y ; t – время; α_o – разность начальных фаз колебаний.

Уравнение траектории движения точки $y=y(x)$ получается путем исключения из функций (1) и (2) времени. Рассмотрим два случая.

1. Частоты колебаний одинаковы, т.е. $\nu_x = \nu_y = \nu$.

Из формулы (1) имеем

$$\cos 2\pi \nu t = x/A_x \text{ и } \sin 2\pi \nu t = \sqrt{1 - x^2/A_x^2} \quad (1a)$$

Из формулы (2)

$$y/A_y = \cos(2\pi \nu t + \alpha_o) = \cos 2\pi \nu t \cdot \cos \alpha_o - \sin 2\pi \nu t \sin \alpha_o \quad (2a)$$

Отсюда после подстановки (1a) в (2a) получаем

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - \frac{2xy}{A_x A_y} \cos \alpha_o = \sin^2 \alpha_o \quad (3)$$

Уравнение (3) описывает траекторию движения точки. Рассмотрим ее вид при различных значениях α_0 .

а) $\alpha_0 = 0$, $\sin\alpha_0 = 0$, $\cos\alpha_0 = 1$. Подставляем в (3) и получаем

$$\left(\frac{x}{A_x} - \frac{y}{A_y}\right)^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{A_y}{A_x}x \quad (3,а)$$

Это прямая линия.

б) $\alpha_0 = \pi$, $\sin\alpha_0 = 0$, $\cos\alpha_0 = -1$. Подставляем в (3) и получаем

$$\left(\frac{x}{A_x} + \frac{y}{A_y}\right)^2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{A_y}{A_x}x \quad (3,б)$$

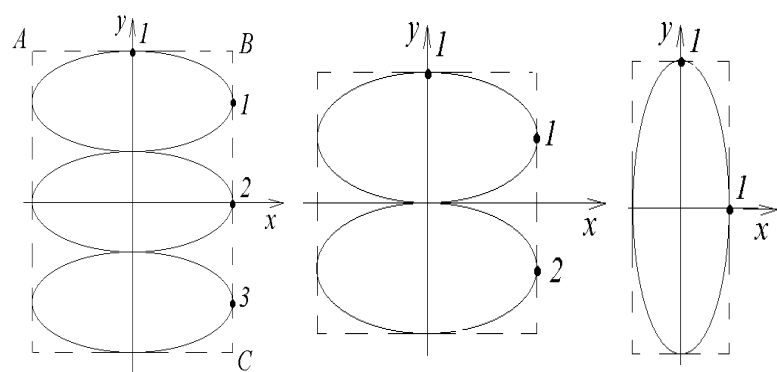
Это прямая линия.

в) $\alpha_0 = \pm \pi/2$, $\sin\alpha_0 = \pm 1$, $\cos\alpha_0 = 0$. Подставляем в (3) и получаем

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} = 1 \quad (3,в)$$

Это эллипс, оси которого совпадают с осями x и y . Если амплитуды колебаний равны, т.е. $A_x = A_y = A$, то эллипс вырождается в окружность радиуса $R=A$:

$$x^2 + y^2 = A^2 \quad (3,г)$$



а) $v_x = 3v_y$
 $n_x = 3$; $n_y = 1$

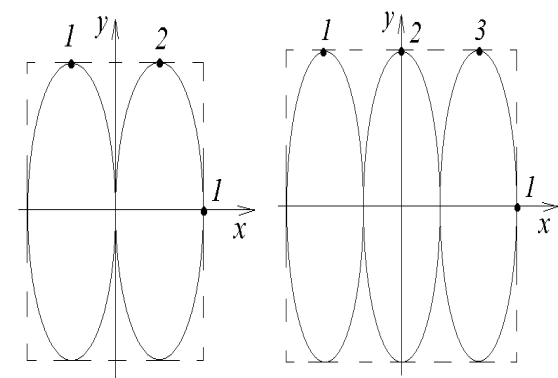
б) $v_x = 2v_y$
 $n_x = 2$; $n_y = 1$

в) $v_x = v_y$
 $n_x = 1$; $n_y = 1$

Уравнение (3в) получается при двойном условии $\alpha_0 = \pm \pi/2$. Различие в этих двух случаях заключается в том, что при $\alpha_0 = +\pi/2$ точка движется по эллипсу по часовой стрелке, а при $\alpha_0 = -\pi/2$ – в обратном направлении. В общем случае уравнение (3) есть уравнение эллипса, оси которого повернуты относительно координатных осей x и y .

2. Частоты колебаний различных, т.е. $v_x \neq v_y$.

В этом случае траектория результирующего движения имеет вид довольно сложных кривых, называемых фигурами Лиссажу. Вид фигур Лиссажу зависит от отношений v_x/v_y , A_x/A_y , а также от разности фаз α_0 . Они могут быть незамкнутыми и изменяться со временем. Если отношение частот является рациональным числом, т.е. $v_x/v_y = n_x/n_y$, где n_x и n_y – целые



г) $v_y = 2v_x$
 $n_x = 1$; $n_y = 2$

д) $v_y = 3v_x$
 $n_x = 1$; $n_y = 3$

Рис. 1

числа, то фигуры Лиссажу оказываются замкнутыми, независящими от времени кривыми. На рис.1 изображено несколько таких фигур Лиссажу при различных соотношениях частот ν_x и ν_y и при разности фаз $\alpha_0 = \pi/2$.

Отношение частот ν_x/ν_y равно отношению числа точек касания n_x/n_y фигуры Лиссажу со сторонами прямоугольника, в который они вписываются, т.е. $\nu_x/\nu_y = n_x/n_y$, где n_x – количество точек касания со стороной ВС, пересекающей ось x ; n_y – количество точек касания со стороной АВ, пересекающей ось y .

Итак, наличие устойчивых во времени, замкнутых фигур Лиссажу означает, что отношение частот колебаний ν_x/ν_y равно отношению целых чисел n_x/n_y . По виду фигур Лиссажу можно определить величину этого отношения (т.е. n_x и n_y). А это дает возможность по известной эталонной частоте, например $\nu_y = 50$ Гц, и по виду получаемых фигур Лиссажу определять другую частоту ν_x .

Порядок выполнения работы

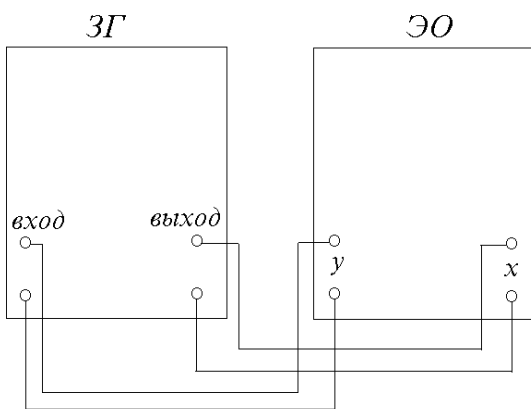
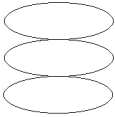
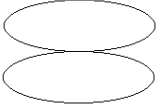


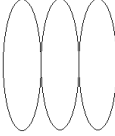


Рис. 1

1. Проверить схему включения по рисунку 1.
2. Вилки электрошнуров осциллографа и звукового генератора включить в розетки с напряжением 220 В.
3. Включить осциллограф, поставив тумблер “Сеть” в положение “Вкл.”, и проверить наличие светящейся точки в центре экрана.
4. Включить звуковой генератор, для чего тумблер “Сеть” поставить в положение “Вкл.”
5. При необходимости ручками “Амплитуда выхода” на звуковом генераторе и “Усиление” на осциллографе установить удобные для наблюдения размеры фигур.
6. Вращая ручку звукового генератора со шкалой, добиться появления фигуры Лиссажу, изображенной на рис.2,в. Определить частоту $\nu_x = \nu_y$ и записать в таблицу в соответствующий столбик показания шкалы звукового генератора (n).
7. Если вращать ручку звукового генератора против часовой стрелки от показания шкалы, полученного в п.6, то будут наблюдаться фигуры, изображенные на рис.2,а,б, если по часовой стрелке, то фигуры рис.2,г,д. Медленно вращая ручку звукового генератора, получить указанные фигуры Лиссажу, определить для каждой частоту ν_x и записать в таблицу соответствующие показания делений шкалы (n). Так как ручка звукового генератора имеет люфт, то измерения надо проводить, подходя к нужной фигуре слева и справа. Для одной и той же фигуры получаются разные значения. Получив по три значения слева и справа, рассчитать среднее значение и стандартное отклонение среднего.
8. По полученным средним значениям построить график $\nu_x(n)$. Начертить отрезки параллельно оси n с центром в экспериментальных точках и длиной в два стандартных отклонения среднего.

Вид фигур					
n_x	3	2	1	1	1
n_y	1	1	1	2	3
n					
$v_x = v_y n_x / n_y$					

Контрольные вопросы

1. Записать закон движения гармонически колеблющейся точки. Что такое амплитуда, циклическая частота, фаза, начальная фаза, период колебания?
2. Привести примеры сложения взаимно перпендикулярных колебаний.
3. Как получить уравнение траектории точки $y(x)$ при сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний?
4. При каких условиях при сложении взаимно перпендикулярных колебаний траектория получается прямой линией, эллипсом, окружностью?
5. Что такое фигуры Лиссажу? При каких условиях они возникают?
6. Какие колебания складываются в лабораторной установке? Что совершает колебания?
7. Что называется градуировкой приборов? Какие способы градуировки Вы знаете?

16. Построение графиков

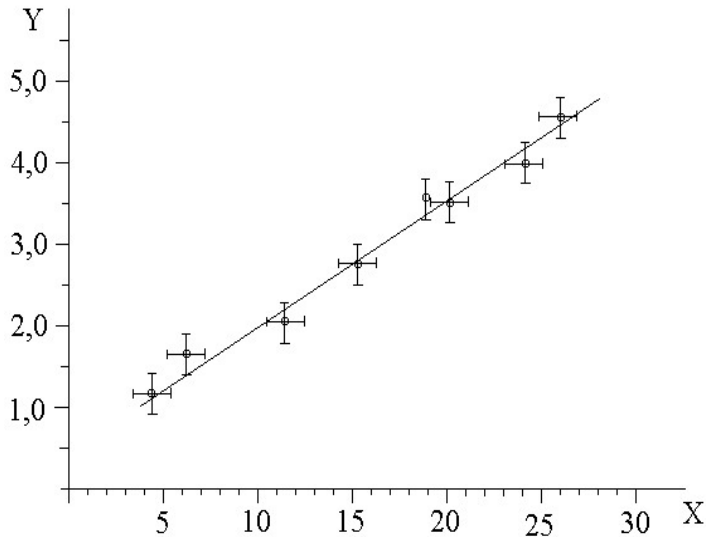


Рис. 1

На осях координат наносят метки, соответствующие выраженным цифровым значениям (т.е. числам, кратным 1, 5, 10 и т.д.). Цифровые значения проставляются (на левой и нижней осях) только для крупных единиц масштаба. Около осей координат (слева и внизу) необходимо написать названия величин, которые отложены по ним, их обозначение и единицы измерения. Все надписи и цифровые значения должны быть крупными.

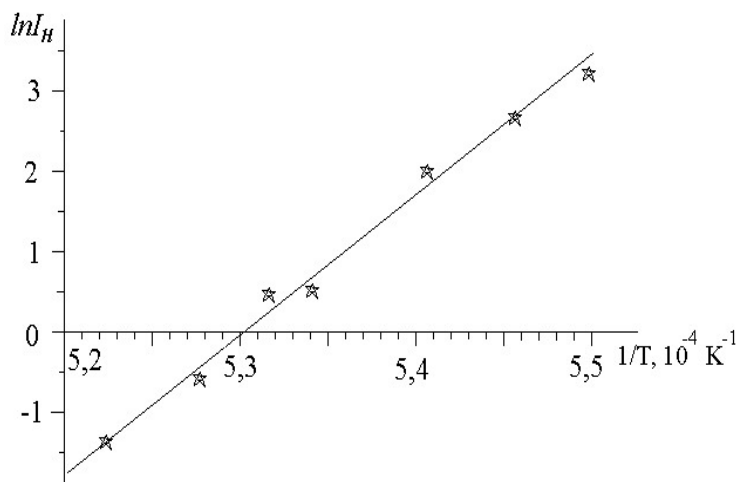


Рис.2

можно сместить в ближайшую метку масштаба, которая лежит левее наименьшего экспериментального значения (см. рис.2).

Графики выполняются преимущественно на миллиметровой бумаге. Сначала нужно выбрать масштаб по осям координат. Масштаб выбирается таким образом, чтобы угол наклона прямых (или касательных к кривым) на графике был близок к 45° . Кривые должны занимать практически все поле чертежа. За единицу масштаба разумно выбирать только числа, кратные 2, 5, 10, 20, 50, 100.

На осях координат наносят метки, соответствующие выраженным цифровым значениям (т.е. числам, кратным 1, 5, 10 и т.д.). Цифровые значения проставляются (на левой и нижней осях) только для крупных единиц масштаба. Около осей координат (слева и внизу) необходимо написать названия величин, которые отложены по ним, их обозначение и единицы измерения. Все надписи и цифровые значения должны быть крупными.

Экспериментальные точки наносятся на чертеж в виде условных знаков небольшого размера (кружочки, квадратики, крестики и т.д.). Желательно для каждой точки на графике указывать погрешность в виде отрезков длиной в одно стандартное отклонение. Погрешности можно указывать для одной или двух переменных (см. рис.1). Если все экспериментальные значения измеренной величины лежат в узком диапазоне, то начало отсчета

17. Математическая обработка результатов эксперимента по методу наименьших квадратов

На практике часто целью измерений является установление вида некоторой функциональной зависимости $y = f(x)$, где x — независимая переменная, а y — зависимая переменная. В эксперименте одновременно определяются как значения x , так и соответствующие им значения y , а задачей является установление математической модели исследуемой зависимости — подборе аналитической функции, наилучшим образом описывающей экспериментальные данные.

Искомая математическая модель функциональной зависимости может быть найдена лишь в результате совместной обработки всех полученных значений x и y . Задача выбора вида функциональной зависимости (эмпирической формулы) — задача не формализуемая, так как одна и та же кривая на данном участке примерно с одинаковой точностью может быть описана самыми различными аналитическими выражениями. Иногда эмпирическую формулу удастся выбрать, исходя из физического смысла в виде линейной зависимости, экспоненциальной или логарифмической функции и т. п., то есть в виде компактного и содержательного выражения, где параметры имеют определенный смысл (интерпретируемы). После того как выбран вид функции-модели, с помощью которой пытаются описать экспериментальные результаты, должны быть найдены параметры, входящие в эту формулу (a , b и т. д.).

Основной способ нахождения этих параметров — метод наименьших квадратов (МНК), хотя он не является единственным.

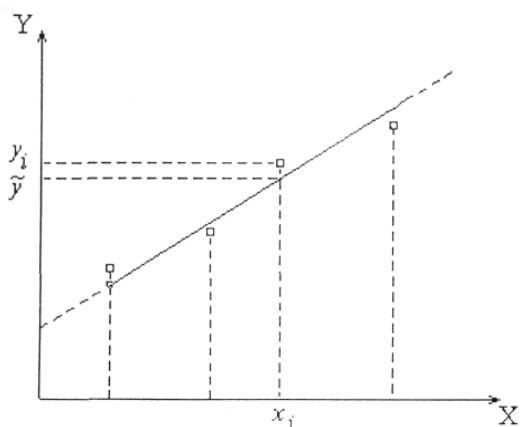


Рис. 1

Пусть после предварительного анализа была выбрана линейная модель вида $y = a \cdot x + b$. Теперь задача состоит в том, чтобы найти наилучшие значения параметров модели a и b . Нам известны значения x_i и y_i — конкретные числа, полученные в опытах (рис. 1).

Для определения неизвестных параметров можно составить систему условных линейных уравнений, каждое из которых имеет вид:

$$y_i = a \cdot x_i + b, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1)$$

Система уравнений (1) при n -кратных измерениях может быть избыточной, если $n > 2$ и, вообще говоря, несовместна, т. к. результаты измерений величин x и y неизбежно содержат ошибки. Поэтому из этих уравнений можно определить лишь оценки искомых параметров A и B , которые являются случайными величинами.

Будем считать, что все пары экспериментальных значений x_i , y_i равновероятны (т. е. измерения равноточны), случайные ошибки величин x и y распределены по нормальному закону, а систематическими ошибками можно пренебречь. Между рассчитанными по модели значениями и экспериментальными отсчетами y будут наблюдаться отклонения. Введем для них обозначение $\Delta_i = y_i - \tilde{y}_i = y_i - (A \cdot x_i + B)$. Математики Лежандр и Гаусс показали, что оценки параметров A и B будут

наиболее вероятными, если сумма квадратов отклонений по всем точкам n будет наименьшей:

$$Q = \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \rightarrow \min \quad (2)$$

Минимум этой суммы находится по правилам дифференциального исчисления: условием минимума функции является обращение в нуль частных производных функции Q по независимым переменным A и B :

$$\frac{\partial Q}{\partial A} = 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial B} = 0. \quad (3)$$

Подставляя (2) в (3), получаем:

$$\begin{cases} A \cdot \sum_{i=1}^n x_i + n \cdot B - \sum_{i=1}^n y_i = 0, \\ B \cdot \sum_{i=1}^n x_i + A \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Решая эту систему уравнений относительно параметров A и B , находим:

$$A = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}. \quad (5)$$

Если разделить числитель и знаменатель уравнения (5) на n^2 , то после несложных преобразований можно выразить коэффициент A через средние значения величин, входящих в эти уравнения. Тогда получим:

$$A = \frac{\langle x \cdot y \rangle - \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad (6)$$

где $\langle x \rangle = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$, $\langle y \rangle = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i$, $\langle x \cdot y \rangle = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i)$, $\langle x^2 \rangle = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2$ – арифметические значения соответствующих величин.

Из уравнения (1), рассчитав параметр A , можно найти параметр B .

$$B = \langle y \rangle - A \cdot \langle x \rangle \quad (6a)$$

Нахождение искомых оценок A и B по уравнениям (6) и (6a) удобно при ручном счете на микрокалькуляторах или на ЭВМ.

Теория дает возможность определить также дисперсию (рассеяние, отклонение экспериментальных точек от модельной прямой) и дисперсию коэффициентов A и B .

Если обозначить S_0^2 – дисперсию точек, S_A^2 и S_B^2 – дисперсии коэффициентов A и B , то

$$S_0^2 = \frac{n}{n-2} \cdot \left\{ \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 - \frac{[\langle x \cdot y \rangle - \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle]^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \right\}, \quad (7)$$

$$S_A^2 = \frac{S_0^2}{n \cdot [\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2]}, \quad (8)$$

$$S_B^2 = S_A^2 \cdot \langle x^2 \rangle. \quad (9)$$

Интервалы, в которых с доверительной вероятностью α могут находиться коэффициенты a и b , записываются в виде

$$A - t_{\alpha, n-2} \cdot S_A \leq a \leq A + t_{\alpha, n-2} \cdot S_A, \quad (10)$$

$$B - t_{\alpha, n-2} \cdot S_B \leq b \leq B + t_{\alpha, n-2} \cdot S_B \quad (11)$$

где $t_{\alpha, n-2}$ - коэффициент Стьюдента.

Полученные формулы непосредственно могут быть использованы для расчета параметров линейных аппроксимирующих зависимостей в лабораторных работах.

18. Правила для математической обработки результатов эксперимента

Прямые измерения

1. Результаты измерений записать в таблицы.

2. Вычислить выборочные средние $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

3. Вычислить выборочные стандартные отклонения среднего

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

4. Определить различные систематические ошибки и рассчитывается суммарная систематическая ошибка: $\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\sigma_{\text{приб}}^2 + \sigma_{\text{окр}}^2 + \sigma_{\text{суб}}^2 + \dots}$, где погрешность прибора $\sigma_{\text{приб}}$ определяется по паспорту прибора. Если погрешность прибора задается как предельная (максимальная) $\Delta_{\text{макс}}$, то приближенно $\sigma_{\text{приб}} \approx \Delta_{\text{макс}} / \sqrt{12}$; погрешность округления $\sigma_{\text{окр}} = \omega / \sqrt{12}$, где ω - цена деления прибора, или та удвоенная доля деления, до которой производится округление; $\sigma_{\text{суб}}$ - субъективная погрешность. В выражении для σ_{Σ} пренебречь всеми ошибками, которые не превышают 10% от максимальной.

5. По таблице 1 надо найти значение коэффициента Стьюдента $t_{\alpha, n}$, где α обычно выбирают 0.7. По таблице 1а определить коэффициент Чебышева γ_{α} , где α опять

же выбрать 0.7. Полуширину доверительного интервала определить по формуле:

$$\Delta x = \sqrt{(t_{\alpha, n} S_{\bar{x}})^2 + (\gamma_a \sigma_{\Sigma})^2}$$

Косвенные измерения.

1. Результаты измерений записать в таблицы.

2. Для результатов прямых измерений аргументов x_i функции f , где i - номер аргумента, вычислить:

а) выборочные средние $\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} x_{i,k}$

б) выборочные стандартные отклонения среднего $S_{\bar{x}_i} = \sqrt{\frac{1}{n_i(n_i-1)} \sum_{k=1}^{n_i} (x_{i,k} - \bar{x}_i)^2}$

3. Для каждого аргумента вычислить суммарные систематические погрешности

$$\sigma_{i\Sigma} = \sqrt{\sigma_{i, \text{приб}}^2 + \sigma_{i, \text{окр}}^2 + \sigma_{i, \text{суб}}^2 + \dots}$$

4. Вычислить выборочное среднее функции $\bar{z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots)$

5. Вычислить стандартное отклонение систематических погрешностей

$$\sigma_{\bar{z}\Sigma} = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{i\Sigma} \right)^2}$$

6. Вычислить оценка стандартного отклонения среднего для случайных погрешно-

стей $S_{\bar{z}} = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} S_{\bar{x}_i} \right)^2}$

7. Задать коэффициент доверия α (например 0.7).

8. Полуширину доверительного интервала определить по формуле:

$$\Delta z = \gamma_{\alpha} \sqrt{S_{\bar{z}}^2 + \sigma_{\bar{z}\Sigma}^2}$$

Отбрасывание результатов прямых измерений. Критерий Шовене

Среди погрешностей измерений могут встречаться промахи - погрешности, существенно превышающие ожидаемые значения при данных условиях эксперимента. Поэтому возникает естественный вопрос - какие погрешности можно считать промахами с целью исключения в дальнейшем соответствующих им результатов измерения? Эта оценка осуществляется на основе *критерия Шовене*.

Пусть проделано N измерений некой величины x и получены следующие результаты: x_1, x_2, \dots, x_N . На основании этих значений можно вычислить \bar{x} и S_x . Если имеется подозрительный результат, погрешность которого, возможно, является промахом,

то для него вычисляют $\tau_{\text{под}} = \frac{|x_{\text{под}} - \bar{x}|}{S_x}$

- число выборочных стандартных отклонений, на которое $x_{\text{под}}$ отличается от \bar{x} .

По таблице 2 Приложения можно найти вероятность $P(\text{вне } \tau_{\text{под}} S_x)$ того, что

нормальное измерение будет отличаться от \bar{x} на $\tau_{\text{под}}$ или более выборочных стандартных отклонений. Наконец, следует умножить полученную вероятность $P(\text{вне } \tau_{\text{под}} S_x)$ на полное число измерений N , чтобы получить

$$n(\text{хуже, чем } x_{\text{под}}) = N \cdot P(\text{вне } \tau_{\text{под}} S_x)$$

которое определяет число ожидаемых измерений, которые дают столь же плохие результаты, что и $x_{\text{под}}$. Если n меньше 0.5, то $x_{\text{под}}$ отбрасывается.

В этом состоит критерий Шовене. После отбрасывания результата, не удовлетворяющего критерию Шовене, надо пересчитать \bar{x} и S_x по оставшимся данным. При n большем 0.5 следует все оставить без изменения.

Рассмотрим пример: произведено шесть измерений некоторой величины и получены следующие результаты

3.8; 3.5; 3.9; 3.9; 3.4; 1.8.

Среди этих результатов подозрительным является 1.8. Поэтому с учетом шести измерений рассчитываем $\bar{x} = 3.4$ и $S_x = 0.8$. Значение 1.8 отличается от \bar{x} на $2S_x$.

Согласно таблицы 2:

$$P(\text{вне } 2S_x) = 1 - P(\text{в пределах } 2S_x) \approx 0.05.$$

То есть из двадцати возможных результатов измерений приблизительно только один результат должен также сильно отличаться от S_x , как число 1.8. В случае проведенных шести измерений ожидаемое число таких результатов $n = 0.05 \cdot 6 = 0.3$. Поскольку $n < 0.5$, то согласно критерию Шовене, подозрительный результат $x = 1.8$ должен быть исключен, а для оставшихся значений $\bar{x} = 3.7$, $S_x = 0.23$.

19. Примеры расчетов

1. Вычислить выборочное среднее \bar{x} и выборочное стандартное отклонение S_x для следующих десяти результатов измерений длины в см.

6.18; 6.16; 6.14; 6.18; 6.20; 6.18; 6.20; 6.20; 6.20; 6.26

$$\bar{x} = \frac{6.18 + \dots + 6.26}{10} = 6.184 \approx 6.18 \text{ см}$$

$$S_x (\approx \sigma_x) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{(n-1)}} = \sqrt{\frac{(6.18 - 6.184)^2 + \dots + (6.26 - 6.184)^2}{9}} = 0.039 \approx 0.04$$

2. Вычислить, какова будет наилучшая оценка для измерения длины и ее погрешности при условии, что все погрешности случайные (статистические) и имеет место нормальный закон распределения случайных величин. Использовать данные задачи 1.

Так как $\alpha = 0.7$, $N = 10$, то $t_{\alpha, n} = 1.1$

$$S_{\bar{x}} = S_x / \sqrt{n}; \Delta x = t_{\alpha, n} \cdot S_{\bar{x}} = \frac{1.1 \cdot 0.039}{\sqrt{10}} = 0.013 \text{ см}$$

$$x = (6.180 \pm 0.013) \text{ см } \varepsilon = \Delta x / \bar{x} = 0.013 / 6.180 \cdot 100\% = 0.21\%$$

3. Предположим, что Вы вычисляете некоторую величину много раз. После вычисления находите, что среднее значение $\bar{x} = 48$, стандартное отклонение

числения находите, что среднее значение $\bar{x} = 48$, стандартное отклонение $\sigma_x = 0.5$. Какую долю отсчетов Вы могли бы найти между (какова вероятность найти между) а) 48.5 и 47.5; б) 48 и 49; в) $P(x \geq 49) = ?$

а) $P(\bar{x} - t\sigma_x \leq x \leq \bar{x} + t\sigma_x) = ?$

Используем Табл.2.

$$\Delta x = \frac{x_1 - x_2}{2}; t = \frac{\Delta x}{\sigma_x} = \frac{48.5 - 47.5}{2 \cdot 0.5} = \frac{0.5}{0.5} = 1; P(\text{в пределах } t\sigma) = 68.27\%$$

б) $P(\bar{x} \leq x \leq \bar{x} + t\sigma_x) = ?$

Используем Табл.3. $\Delta x = 1; t = \frac{1}{0.5} = 2; P(\text{в пределах } t\sigma) = 47.72\%$

в) $P(x \geq \bar{x} + t\sigma_x) = ?$

Используем Табл.3.

$$P(x \geq \bar{x} + t\sigma) = 50\% - P(\bar{x} \leq x \leq \bar{x} + t\sigma_x) = 50\% - 47.72\% = 2.28\%$$

4. Массовое обследование новорожденных детей показало, что средний рост детей при рождении $\bar{h} = 51$ см. Стандартное отклонение $\sigma_x = 3$ см. В случайной выборке из 1000 детей сколько детей будет по нашему ожиданию иметь рост между 52 см и 54 см. Распределение случайных величин подчиняется нормальному закону. Используем Табл.3.

$$P(52 \div 54) = P(51 \div 54) - P(51 \div 52); t = \Delta x / \sigma_x; t_1 = \frac{54 - 51}{3} = 1; t_2 = \frac{52 - 51}{3} = 0.33;$$

$$P(\text{в пределах } t_1\sigma) = 34.13\%, P(\text{в пределах } t_2\sigma) = 12.93\%; P(52 \div 54) = 34.13\% - 12.93\% = 21.20\%$$

Можно подсчитать число детей $N = n \cdot P = 1000 \cdot 0.2120 \approx 212$ детей

5. Критерий *Шовене*. Предположим, что Вы сделали 20 измерений собственной массы и получили среднее значение 95 кг и стандартное отклонение $\sigma_x = 1.5$ кг. Одно из измерений равно 99 кг. Должны ли Вы отбросить это значение?

- $t_{\text{под}} = \frac{|x_{\text{под}} - \bar{x}|}{\sigma_x} = \frac{99 - 95}{1.5} = 2.67$ – число стандартных отклонений, на которое $x_{\text{под}}$ отличается от \bar{x} .

- Используем Табл.2 $P(\text{в пределах } 2.67\sigma) = 99.24\%$
- $P(\text{вне } 2.67\sigma) = 100\% - P(\text{в пределах } 2.67\sigma) = 100\% - 99.24\% = 0.76\%$
- $n = N \cdot P(\text{вне } 2.67\sigma) = 20 \cdot 0.0076 = 0.152$
- $n = 0.152 < 0.5$ следовательно значение 99 кг следует отбросить.

6. Запись окончательного результата:

Значащими цифрами числа называют все его цифры, начиная с первой, отличной от нуля слева. Например: число 0,00707 содержит три значащие цифры; число 2,500 – четыре значащие цифры.

Лучше, если погрешность и среднее значение будут записаны в степенном виде с одинаковой степенью.

$$(1.61 \cdot 10^{-19} \pm 5 \cdot 10^{-21}) \text{ Кл} = (1.61 \pm 0.05) \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

В учебной лаборатории экспериментальные погрешности должны округляться до одной значащей цифры.

$$(20.1653 \pm 0.57) \text{ м/с} = (20.2 \pm 0.6) \text{ м/с}$$

$$(6251.68 \pm 35.72) \text{ кг} = (6250 \pm 40) \text{ кг}$$

$$(7.163 \pm 0.05032) \text{ м} = (7.16 \pm 0.05) \text{ м}$$

Но если первая значащая цифра это 1 или 2, то погрешность округляется до второй значащей цифры.

$$(20.1653 \pm 0.145) \text{ м/с} = (20.20 \pm 0.15) \text{ м/с}$$

$$(6251.68 \pm 25.72) \text{ кг} = (6250 \pm 26) \text{ кг}$$

Как известно, при округлении последняя цифра увеличивается на одну единицу значения своего разряда, если последовательность отбрасываемых цифр, стоящих правее последней, превышает половину значения этой единицы, и остается неизменной в противном случае.

$$(6251.68 \pm 35.72) \text{ кг} = (6250 \pm 40) \text{ кг}$$

При записи результата последняя ненулевая значащая цифра в среднем значении измеряемой величины должна быть того же разряда, что и первая значащая цифра погрешности.

$$(6251.68 \pm 35.72) \text{ кг} = (6250 \pm 40) \text{ кг}$$

Если в погрешности имеется десятичная запятая, то число цифр после запятой в среднем значении измеряемой величины должно быть равно числу цифр после запятой в погрешности.

$$(35 \pm 0.005) \text{ м/с}^2 = (35.000 \pm 0.005) \text{ м/с}^2$$

$$(20.1653 \pm 0.145) \text{ м/с} = (20.20 \pm 0.15) \text{ м/с}$$

При расчетах результата косвенных измерений или в иных случаях, когда приходится выполнять вычисления с приближенными числами, необходимо помнить несколько простых правил. При сложении и вычитании обычно у членов суммы (или разности) последняя значащая цифра находится в разных разрядах. Перед выполнением операций сложения (или вычитания) нужно определить самый старший разряд, в котором находится последняя цифра у одного из членов суммы (разности), и все остальные члены суммы (разности) округлить до этого разряда. Например, сумму

$$3.14 + 25$$

нужно представить как $3 + 25$.

Результат умножения или деления, очевидно, не может содержать больше верных значащих цифр, чем их содержит сомножитель (или делимое, или делитель) с минимальным числом значащих цифр. Поэтому результат умножения (деления) необходимо округлять до этого минимального числа значащих цифр. Например, результат умножения двух чисел 3,14 и 25 следует представить как

$$3.14 \cdot 25 = 78$$

При возведении в степень или извлечении корня (любой степени), логарифмировании или вычислении какой-либо стандартной функции результат записывается с тем же числом значащих цифр, какое содержит аргумент.

При выполнении какой-либо комбинации арифметических операций у чисел, соответствующих промежуточным результатам, сохраняют на одну значащую цифру больше, чтобы избежать дополнительных погрешностей, связанных с округлением.

Известны две величины a и b : $\bar{a} = 0.73$ м; $\sigma_{\bar{a}} = 0.05$ м,

$\bar{b} = 2.18$ м; $\sigma_{\bar{b}} = 0.07$ м. Вычислить среднее значение функции $g = f(a, b)$ и его стандартное отклонение $\sigma_{\bar{g}}$.

а) $g = (a + b)$; б) $g = (a - b)$; в) $g = a \cdot b$; г) $g = a/b$; д) $g = a^b$

Общие правила расчетов: $\bar{g} = g(\bar{a}, \bar{b})$; $\sigma_{\bar{g}} = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial a} \sigma_{\bar{a}}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial b} \sigma_{\bar{b}}\right)^2} \bigg|_{\substack{a=\bar{a} \\ b=\bar{b}}}$

а) $\bar{g} = (0.73 + 2.18)$ м = 2.91 м.

$$\frac{\partial g}{\partial a} = \frac{\partial g}{\partial b} = 1; \Rightarrow \sigma_{\bar{g}} = \sqrt{(1 \cdot \sigma_{\bar{a}})^2 + (1 \cdot \sigma_{\bar{b}})^2} = \sqrt{0.05^2 + 0.07^2} = 0.086 \approx 0.09 \text{ м}$$

$$g = (2.91 \pm 0.09) \text{ м}$$

б) $\bar{g} = (0.73 - 2.18) = -1.55$ м;

$$\frac{\partial g}{\partial a} = 1; \frac{\partial g}{\partial b} = -1; \Rightarrow \sigma_{\bar{g}} = \sqrt{(1 \cdot \sigma_{\bar{a}})^2 + (-1 \cdot \sigma_{\bar{b}})^2} = \sqrt{0.05^2 + (-0.07)^2} = 0.086 \approx 0.09 \text{ м}$$

$$g = (-1.55 \pm 0.09) \text{ м}$$

в) $\bar{g} = \bar{a} \cdot \bar{b} = 0.73 \cdot 2.18 = 1.59$ м²

$$\frac{\partial g}{\partial a} \bigg|_{\substack{a=\bar{a} \\ b=\bar{b}}} = \bar{b}; \frac{\partial g}{\partial b} \bigg|_{\substack{a=\bar{a} \\ b=\bar{b}}} = \bar{a}; \Rightarrow \sigma_{\bar{g}} = \sqrt{(\bar{b} \sigma_{\bar{a}})^2 + (\bar{a} \sigma_{\bar{b}})^2} = \sqrt{(2.18 \cdot 0.05)^2 + (0.73 \cdot 0.07)^2} = 0.12$$

$$g = (1.60 \pm 0.12) \text{ м}^2$$

г) $\bar{g} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{0.73 \text{ м}}{2.18 \text{ м}} = 0.335$

$$\frac{\partial g}{\partial a} \bigg|_{\substack{a=\bar{a} \\ b=\bar{b}}} = \frac{1}{\bar{b}}; \frac{\partial g}{\partial b} \bigg|_{\substack{a=\bar{a} \\ b=\bar{b}}} = -\frac{\bar{a}}{\bar{b}^2}; \Rightarrow \sigma_{\bar{g}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{a}}}{\bar{b}}\right)^2 + \left(-\frac{\bar{a} \sigma_{\bar{b}}}{\bar{b}^2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0.05}{2.18}\right)^2 + \left(\frac{0.73 \cdot 0.07}{2.18^2}\right)^2} = 0.025$$

$$g = (0.330 \pm 0.025) \text{ м}^2$$

д) $\bar{g} = \bar{a}^{\bar{b}} = 0.73^{2.18} = 0.50$

$$\left. \frac{\partial g}{\partial a} \right|_{a=\bar{a}} = \bar{b} \cdot \bar{a}^{\bar{b}-1}; \left. \frac{\partial g}{\partial b} \right|_{a=\bar{a}} = \bar{a}^{\bar{b}} \ln \bar{a}; \Rightarrow \sigma_{\bar{g}} = \sqrt{\left(\bar{b} \cdot \bar{a}^{\bar{b}-1} \cdot \sigma_{\bar{a}} \right)^2 + \left(\bar{a}^{\bar{b}} \ln \bar{a} \cdot \sigma_{\bar{b}} \right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(2.18 \cdot 0.73^{1.18} \cdot 0.05 \right)^2 + \left(0.73^{2.18} \cdot \ln 0.73 \cdot 0.07 \right)^2} = 0.076$$

$$g = (0.50 \pm 0.08)$$

8. Косвенные измерения. Метод "шаг за шагом"

$$x = \frac{m_1 \left(g - 2h/t_1^2 \right)}{m_2 \left(g - 2h/t_2^2 \right)} = \frac{m_1 \cdot u_1}{m_2 \cdot u_2}, \text{ где } u_1 = g - a_1; u_2 = g - a_2; a_1 = 2h/t_1^2; a_2 = 2h/t_2^2$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \bar{x} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{m}_1}}{\bar{m}_1} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{m}_2}}{\bar{m}_2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{u}_1}}{\bar{u}_1} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{u}_2}}{\bar{u}_2} \right)^2}$$

$$\sigma_{\bar{u}_1} = \sqrt{\left(\sigma_{\bar{g}} \right)^2 + \left(\sigma_{\bar{a}_1} \right)^2}; \sigma_{\bar{u}_2} = \sqrt{\left(\sigma_{\bar{g}} \right)^2 + \left(\sigma_{\bar{a}_2} \right)^2};$$

$$\sigma_{\bar{a}_1} = \bar{a}_1 \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{h}}}{\bar{h}} \right)^2 + \left(\frac{2\sigma_{\bar{t}_1}}{\bar{t}_1} \right)^2}; \sigma_{\bar{a}_2} = \bar{a}_2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{h}}}{\bar{h}} \right)^2 + \left(\frac{2\sigma_{\bar{t}_2}}{\bar{t}_2} \right)^2}$$

9. Линейка металлическая, метровая используется для прямого измерения длины, которая измеряется 5 раз. Цена деления $\omega = 1$ мм. Рассчитать погрешности и записать результат измерения длины для доверительной вероятности 68% для следующих результатов:

$$62.4; 62.7; 62.6; 62.3; 62.8 \text{ (см)}$$

$$\bar{l} = 62.56 \text{ см}; S_{\bar{l}} = \sqrt{\frac{(62.4 - 62.56)^2 + \dots}{5 \cdot 4}} = 0.092 \text{ см}$$

$$\text{Приборная ошибка } \sigma_{\text{приб}} = \frac{\Delta_{\text{max}}}{\sqrt{12}} = \frac{0.02 \text{ см}}{\sqrt{12}} = 0.0058 \text{ см}$$

$$\text{Ошибка округления } \sigma_{\text{окр}} = \frac{\omega}{\sqrt{12}} = \frac{0.1 \text{ см}}{\sqrt{12}} = 0.029 \text{ см}$$

Суммарная систематическая погрешность

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\sigma_{\text{приб}}^2 + \sigma_{\text{окр}}^2} = 0.029 \text{ см}$$

Для доверительного интервала 68% ($\alpha \approx 0.7$) определим полуширину интервала Δl

$$\Delta l = \sqrt{(t_{0.7,5} \cdot S_{\bar{l}})^2 + (\gamma_{0.7} \cdot \sigma_{\Sigma})^2} = \sqrt{(1.2 \cdot 0.092)^2 + (1.8 \cdot 0.029)^2} = 0.12$$

$$l = (62.52 \pm 0.12) \text{ см}$$

Таблица коэффициентов Стьюдента

Таблица 1.

N α	0.2	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	0.999
2	0.32	1.00	1.38	2.0	3.1	6.3	12.7	31.8	63.6	636.6
3	0.29	0.82	1.06	1.3	1.9	2.9	4.3	7.0	9.9	31.6
4	0.28	0.76	0.98	1.2	1.6	2.4	3.2	4.5	5.8	12.9
5	0.27	0.74	0.94	1.2	1.5	2.1	2.8	3.7	4.5	8.6
6	0.27	0.73	0.92	1.2	1.5	2.0	2.6	3.4	4.0	6.9
7	0.26	0.72	0.91	1.1	1.4	1.9	2.4	3.1	3.7	6.0
8	0.26	0.71	0.90	1.1	1.4	1.9	2.4	3.0	3.5	5.4
9	0.26	0.71	0.89	1.1	1.4	1.9	2.3	2.9	3.4	5.0
10	0.26	0.70	0.88	1.1	1.4	1.8	2.3	2.8	3.3	4.8
11	0.26	0.70	0.88	1.1	1.4	1.8	2.2	2.8	3.2	4.6
12	0.26	0.70	0.88	1.1	1.4	1.8	2.2	2.7	3.1	4.4
13	0.26	0.70	0.87	1.1	1.4	1.8	2.2	2.7	3.1	4.3
14	0.26	0.69	0.87	1.1	1.4	1.8	2.2	2.6	3.0	4.2
15	0.26	0.69	0.87	1.1	1.3	1.8	2.1	2.6	3.0	4.1
16	0.26	0.69	0.87	1.1	1.3	1.8	2.1	2.6	2.9	4.1
17	0.26	0.69	0.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.6	2.9	4.0
18	0.26	0.69	0.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.6	2.9	4.0
19	0.26	0.69	0.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.6	2.9	3.9
20	0.26	0.69	0.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.9	3.9
50	0.25	0.68	0.86	1.0	1.3	1.7	2.0	2.4	2.7	3.5
100	0.25	0.67	0.85	1.0	1.3	1.7	2.0	2.4	2.6	3.4
∞	0.25	0.67	0.85	1.0	1.3	1.6	2.0	2.3	2.6	3.3

Коэффициенты γ_α для неравенства Чебышева

Таблица 1а.

α	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
γ_α	1,4	1,6	1,8	2,2	3,2	4,4

